Решение неоднородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Нахождение частных решений неоднородных линейных дифференциальных уравнений

Общее решение неоднородного ЛДУ состоит из общего решения ОЛДУ и частного решения НЛДУ, т.е.

$$y_{ону} = y_{оо}^{(x)} + y_{чну}^{(x)}.$$

Итак $y'' + py' + qy = f(x)$.

1. Определение общего решения ОЛДУ

$$y'' + py' + qy = 0, \quad y_{оо}^{(x)} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

2. Определение $y_{чну}$ в виде

$$y_{чну} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x).$$

Метод вариации произвольных постоянных.

$y'_ч = C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + C_1 y'_1 + C_2 y'_2$. Требуем в силу независимости функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ выполнения условия

$$C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0, \text{ тогда } y'_ч = C'_1 y_1 + C_2 y'_2.$$

Определим $y''_ч = C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C_1 y''_1 + C_2 y''_2$. Подстановка в НЛДУ приводит к уравнению

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C_1\left(y''_1 + py'_1 + qy_1\right) + C_2\left(y''_2 + py'_2 + qy_2\right) = f(x).$$

Так как $y''_1 + py'_1 + qy_1 = 0$ и $y''_2 + py'_2 + qy_2 = 0$, имеем $C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x)$. Тогда система ЛДУ для определения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ запишется так:

1. $\left.\begin{aligned} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 &= 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 &= f(x) \end{aligned}\right\}$; $C'_1(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-y_2 f(x)}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1}$; $C'_2(x) = \dfrac{y_1 f(x)}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1}$;

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1} dx; \quad C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1} dx.$$

Суммируя $y_{чн}$ и $y_{оо}$ получим общее решение НЛДУ

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y_1\int\frac{-y_2f(x)}{W(x)}dx+y_2\int\frac{y_1f(x)}{W(x)}dx.$$

Для нахождения частного решения НЛДУ формируются начальные условия, т.е. из множества интегральных кривых выбирается кривая (единственная), проходящая через точку $(x_0;y_0)$ и удовлетворяющая условиям:

При $x=x_0$: $y(x_0)=y_0$

$y'(x_0)=y'_0$, т.е. к точке $(x_0;y_0)$ интегральная кривая должна иметь угол наклона касательной равный $tg\alpha=y'_0$.

Тогда $\left.\begin{aligned}C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+y_ч(x_0)=y_0\\C_1y'_1(x_0)+C_2y'_2(x_0)+y'_ч(x_0)=y'_0\end{aligned}\right\}$

или

$$\overline{C}_1=\frac{\begin{vmatrix}y_0-y_ч(x_0) & y_2(x_0)\\ y_0-y'_ч(x_0) & y'_2(x_0)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(x_0) & y_2(x_0)\\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0)\end{vmatrix}};\ \overline{C}_2=\frac{\begin{vmatrix}y_1(x_0) & y_0-y_ч(x_0)\\ y'_1(x_0) & y'_0-y'_ч(x_0)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(x_0) & y_2(x_0)\\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0)\end{vmatrix}}.$$

Частное решение НЛДУ представляется так:

$$y(x)=\overline{C}_1y_1(x)+\overline{C}_2y_2(x)+y_1(x)\int\frac{-y_2(x)f(x)}{W(x)}dx+y_2(x)\int\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx.$$

Пример:

$$y''-5y'+6y=4\sin 2x.$$

I. $k^2-5k+6=0$,

$k_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}$, $k_1=2$, $k_2=3$.

$y_{0,0}(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$.

II. $y_{чну}=c_1(x)e^{2x}+c_2(x)e^{3x}$.

$$\begin{cases}c'_1e^{2x}+c'_2e^{3x}=0\\ c'_12e^{2x}+c'_23e^{3x}=4\sin 2x\end{cases};$$

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ 4\sin 2x & 3e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = -4e^{-2x}\sin 2x; \quad C_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 4\sin 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = 4e^{-3x}\sin 2x;$$

$$C_1 = -\int 4e^{-2x}\sin 2x dx = e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x);$$

$$C_2 = \int 4e^{-3x}\sin 2x dx = -\frac{4}{13}e^{-3x}(3\sin 2x + 2\cos 2x);$$

$$y_{он} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + e^{2x}e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x) - e^{3x}\frac{4}{13}e^{-3x}(3\sin 2x + 2\cos 2x);$$

$$y_{он} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \sin 2x\left(1 - \frac{12}{13}\right) + \cos 2x\left(1 - \frac{8}{13}\right);$$

$$y_{он} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{13}\sin 2x + \frac{5}{13}\cos 2x.$$

Метод нахождения частного решения неоднородного дифференциального уравнения по виду правой части

Рассмотрим наиболее часто используемые виды для правых частей ЛДУ, структура которых обобщает ряд частных случаев.

I. Пусть уравнение имеет в правой части функцию вида

$y'' + py' + qy = 0$; $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$; $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени, т.е. $P_n(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n$.

$y_{чн}$ выбирается в виде правой части, т.е.

$$y_{чн} = Q_n(x)e^{\alpha x}\, Q_n(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n.$$

Здесь коэффициенты B_i – известные, а A_i – коэффициенты, подлежащие определению. Внесем $y_{чн}$ в ЛДНУ.

$$y'_{чн} = Q'_n e^{\alpha x} + \alpha Q_n e^{\alpha x}; \; y''_{чн} = Q''_n e^{\alpha x} + Q'_n \alpha e^{\alpha x} + \alpha Q'_n e^{\alpha x} + \alpha^2 Q_n e^{\alpha x};$$

$y'_{чн} = (Q'_n + \alpha Q_n)e^{\alpha x}$; $y''_{чн} = (Q''_n + 2\alpha Q'_n + \alpha^2 Q_n)e^{\alpha x}$;

$[Q''_n + Q'_n(2\alpha + p) + (\alpha^2 + p\alpha + q)]e^{\alpha x} = P_n(x)e^{\alpha x}$ или

$Q''_n + (2\alpha + p)Q'_n + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n = P_n$. Анализ полученного алгебраического уравнения позволяет определить выбор $y_{чн}$.

1. Так, если α в правой части, показатель экспоненты не равен корням k_1, k_2 характеристического уравнения, то $y_{чн}$ выбирается в виде

$$y_{чн} = Q_n(x)e^{\alpha x},$$

где $Q_n(x)$ многочлен той же степени, что и $P_n(x)$.

2. Если α будет равен одному из корней k_1 или k_2, тогда

$\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ и уравнение примет вид $Q''_n + Q'_n(2\alpha + p) = P_n(x)$.

Выражение слева – есть многочлен $n-1$ степени, а справа – многочлен $n-$ой степени. Для их уравнивания $y_{чн}$ необходимо выбрать в виде $y_{чн} = xQ_n(x)e^{\alpha x}$.

3. Если корни характеристического уравнения кратные, т.е. двукратный $\alpha = k_1 = k_2 = k$, тогда $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ и $2\alpha + p = 0$ и уравнение имеет вид $Q''_n = P_n(x)$. Для уравнения степеней слева и справа равенства, необходимо $y_{чн}$ выбрать в виде

$$y_{чн} = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}.$$

Коэффициенты A_i определяются из алгебраических уравнений, получаемых из сравнения коэффициентов при одинаковых степенях «x» в левой и правой части уравнений.

Итак: $y_{чн} = e^{\alpha x}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n\right)$;

$y'_{чн} = \alpha e^{\alpha x}\left(A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n\right) + e^{\alpha x}\left(A_1 + 2xA_2 + 3x^2 A_3 + \ldots + nx^{n-1}A_n\right)$;

$$y''_{чн} = \alpha^2 e^{\alpha x}\left(A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n\right) + \alpha e^{\alpha x}\left(A_1 + 2xA_2 + 3x^2 A_3 + \ldots + nx^{n-1}A_n\right) +$$
$$+ \alpha e^{\alpha x}\left(A_1 + 2xA_2 + 3x^2 A_3 + \ldots + nx^{n-1}A_n\right) + e^{\alpha x}\left(2A_2 + 6xA_3 + \ldots + n(n-1)x^{n-2}A_n\right).$$

Внесем $y_{чн}(x)$, $y'_{чн}(x)$; $y''_{чн}(x)$ в уравнение

$$y''(x)+py'(x)+qy=f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}.$$

Получим:

$$\left[\alpha^2\left(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n\right)+2\alpha\left(A_1+2xA_2+3x^2A_3+\ldots+nx^{n-1}A_n\right)+\right.$$
$$\left.+\left(2A_2+6xA_3+\ldots+n(n-1)x^{n-2}A_n\right)\right]e^{\alpha x}+P\left[\alpha\left(A_0+xA_1+x^2A_2+\ldots+x^nA_n\right)+\right.$$
$$\left.+\left(A_1+2xA_2+3x^2A_3+\ldots+nx^{n-1}A_n\right)\right]e^{\alpha x}+q\left[A_0+xA_1+x^2A_2+\ldots+x^nA_n\right]e^{\alpha x}=$$
$$=\left(B_0+B_1x+\ldots+B_nx^n\right)e^{\alpha x};$$

1. x^0 : $\alpha^2A_0+2\alpha A_1+2A_2+p(\alpha A_0+A_1)+qA_0=B_0$;

2. x^1 : $\alpha^2A_1+4\alpha A_2+6A_3+p(\alpha A_1+2A_2)+qA_1=B_1$;

3. x^2 : $\alpha^2A_2+6\alpha A_3+12\alpha A_4+p(\alpha A_2+3A_3)+qA_2=B_2$ и т.д.

Количество уравнений равно «$n+1$», т.к. $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Если $n=0$. $P_0(x)=B_0$: $\alpha^2A_0+p\alpha A_0+qA_0=B_0$; $A_0=\dfrac{B_0}{\alpha^2+p\alpha+q}$.

$n=1$. $P_1(x)=B_0+xB_1$: $\begin{cases}\alpha^2A_0+2\alpha A_1+pA_1+qA_0=B_0\\ \alpha^2A_1+p\alpha A_1+qA_1=B_1\end{cases}$; $A_1=\dfrac{B_1}{\alpha^2+p\alpha+q}$;

$$A_0=\frac{B_0-A_1(2\alpha+p)}{\alpha^2+q}=\frac{B_0\left(\alpha^2+p\alpha+q\right)-B_1(2\alpha+p)}{\left(\alpha^2+q\right)\left(\alpha^2+p\alpha+q\right)}.$$

$n=2$. $P_2(x)=B_0+xB_1+x^2B_2$: $\begin{cases}A_0\left(\alpha^2+p\alpha+q\right)+A_1(2\alpha+p)+2A_2=B_0\\ A_1\left(\alpha^2+p\alpha+q\right)+A_2(4\alpha+p)=B_1\\ A_2\left(\alpha^2+p\alpha+q\right)=B_2\end{cases}$ $\rightarrow$

$\rightarrow A_0;\ A_1;\ A_2.$

II. $f(x)=P_{1n}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+P_{2n}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Преобразуем $f(x)$ используя формулы связи Эйлера

$$\cos\beta x=\frac{1}{2}\left(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}\right);\ \sin\beta x=\frac{1}{2i}\left(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}\right).$$

Тогда $f(x)=\frac{1}{2}P_{1n}(x)e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}\right)+\frac{1}{2i}P_{2n}(x)e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}\right)$

или

$$f(x)=e^{(\alpha+i\beta)}\left[\frac{1}{2}P_{1n}(x)-iP_{2n}(x)\right]+e^{(\alpha-i\beta)x}\left[\frac{1}{2}P_{1n}(x)-iP_{2n}(x)\right]=$$
$$=U_n(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+V_n(x)e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Отсюда очевидно, что при выборе частного решения необходимо проверять комплексные корни характеристического уравнения с выражением $\alpha+\beta i$ или с $\alpha-\beta i$.

1. Если для $f(x)=(P_{1n}(x)\cos\beta x+P_{2n}(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$ корни характеристического уравнения $k_{1,2}\neq\alpha\pm\beta i$, то $y_{чн}$ выбирается в виде

$$y_{чн}(x)=[Q_{1n}(x)\cos\beta x+Q_{2n}(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}.$$

Здесь необходимо иметь в виду, что для $Q_{1n}(x)$ и $Q_{2n}(x)$ степень «n» выбирается большая из $P_{1n}(x)$ и $P_{2n}(x)$.

2. Если $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, то $y_{чн}$ выбирается в таком виде

$$y_{чн}(x)=xe^{\alpha x}[Q_{1n}(x)\cos\beta x+Q_{2n}(x)\sin\beta x],$$

т.к. случай кратных комплексных корней для характеристического уравнения второй степени отпадает, где

$$Q_{1n}(x)=A_0+A_1x+\ldots+A_nx^n; \qquad Q_{2n}(x)=A_0^*+A_1^*x+\ldots+A_n^*x^n$$

подлежат определению $2(n+1)$ коэффициентов A_i, A_i^* $(i=0,1,\ldots,n)$.

3. Если правая часть состоит только из $f(x)=e^{\alpha x}P_{1n}(x)\cos\beta x$ или $f(x)=P_{2n}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, то частные решения выбираются, как и ранее, в полной форме.

4. Если $P_{1n}(x)=M$; $P_{2n}(x)=N$; $\alpha=0$, т.е. $f(x)=M\cos\beta+N\sin\beta$.

4.1) то частное решение выбирается $y_{чн}(x)=A\cos\beta+A^*\sin\beta x$, если $\pm\beta i\neq k_{1,2}$.

4.2) если $\pm\beta i=k_{1,2}$, $y_{чн}(x)=x\left(A\cos\beta+A^*\sin\beta x\right)$.

Отметим, что в этом случае коэффициенты A_i, A_i^* определяются из решения алгебраической системы уравнений, получаемой из сравнения коэффициентов в уравнении

$$y''_{чн} + py'_{чн} + qy_{чн} = f(x)$$

при

x^0: 1. $e^{\alpha x}\cos\beta x$. 2. $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

x^1: 1. $xe^{\alpha x}\cos\beta x$. 2. $xe^{\alpha x}\sin\beta x$.

----

x^n: 1. $x^n e^{\alpha x}\cos\beta x$. 2. $x^n e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Количество уравнений $2(n+1)$, что соответствует количеству коэффициентов $(n+1)A$ и $(n+1)A^*$, т.е. $2(n+1)$.

Пример: Рассмотрим тот же пример, для которого $y_{чн}$ было определено МВПП.

$y'' - 5y' + 6y = 4\sin 2x$. Здесь $y_{oo}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$:

то $y_{1ч}(x) + y_{2ч}(x)$ есть частное решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$

Внесем $y_{1чн}(x) + y_{2чн}(x)$ в уравнение. Получим

$$[y''_{1чн}(x) + py'_{1чн}(x) + qy_{1чн}(x) - f_1(x)] + [y''_{2чн}(x) + py'_{2чн}(x) + qy_{2чн}(x) - f_2(x)] = 0/$$

Полученное выражение есть тождество.