УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

1) $(2x+y)dx+(x+2y)dy=0$

• $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$; $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ $\Rightarrow$ имеем уравнение в полных дифференциалах.

Так как исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y \qquad \Rightarrow \qquad u=x^2+yx+\varphi(y). \tag{1}$$

Замечание 1. После интегрирования возникла не константа C, а функция $\varphi(y)$, поскольку до интегрирования мы имели частную производную по x; это же учитывается и при вычислении интеграла.

Вычислив частную производную по y от обеих частей последнего уравнения, будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+\varphi'(y).$$

С другой стороны, поскольку исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, то

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+2y.$$

Приравнивая правые части двух последних уравнений, будем иметь

$$x+\varphi'(y)=x+2y \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y)=2y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y)=y^2.$$

Подставив функцию $\varphi(y)$ в (1) и приравняв полученное выражение к C, получим общее решение

$$u=x^2+yx+y^2+C \bullet$$

2) $(10xy-8y+1)dx+\left(5x^2-8x+3\right)dy=0$

• $10x-8=10x-8$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=10xy-8y+1 \qquad \Rightarrow \qquad u=5x^2y-8xy+x+\varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=5x^2-8x+x+\varphi'(y)=5x^2-8x+3 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi'(y)=3 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(y)=3y.$$

$$u=5x^2y-8xy+x+3y=C \bullet$$

3) $\left(2x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\dfrac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0$

- $$\frac{\partial P}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{-x}{y^2}\right);$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{-1}{y}e^{\frac{x}{y}}+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}-1\right)=e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{-x}{y^2}\right);$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+e^{\frac{x}{y}} \quad\Rightarrow\quad u=x^2+ye^{\frac{x}{y}}+\varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}+ye^{\frac{x}{y}}\left(\frac{-x}{y^2}\right)+\varphi'(y)=\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}} \quad\Rightarrow\quad \varphi'(y)=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi(y)=0;$$

$$u=x^2+ye^{\frac{x}{y}}=C\ \bullet$$

4) $2x\cos^2 y dx+\left(2y-x^2\sin 2y\right)dy=0$

- $$\frac{\partial P}{\partial y}=2x2\cos y(-\sin y); \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=-2x\sin 2y \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cos^2 y \quad\Rightarrow\quad u=x^2\cos^2 y+\varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2\cos y(-\sin y)x^2+\varphi'(y)=2y-x^2\sin 2y \quad\Rightarrow\quad \varphi'(y)=2y \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \varphi(y)=y^2;$$

$$u=x^2\cos^2 y+y^2=C\ \bullet$$

В некоторых случаях, когда исходное дифференциальное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, удается подобрать так называемый интегрирующий множитель $\mu=\mu(x,y)$, после домножения на который уравнение превращается в уравнение в полных дифференциалах. Методов, которые позволили бы однозначно подобрать интегрирующий множитель, нет. В некоторых случаях его удается подобрать, считая μ функцией только от x, только от y, от $\frac{x}{y}$, от x^2+y^2.

5) $\left(x^2+y^2+2x\right)dx+2ydy=0$

• $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2y$; $\qquad \dfrac{\partial Q}{\partial y}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Таким образом, исходное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Допустим, что удалось подобрать интегрирующий множитель $\mu(x,y)$. Домножим обе части уравнения на него. Тогда:

$$P=\mu\left(x^2+y^2+2x\right); \qquad Q=\mu 2y;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(x^2+y^2+2x\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x}[2y\mu] \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y}\left(x^2+y^2+2x\right)+2\mu y=2y\frac{\partial \mu}{\partial x};$$

Предположим, что μ функция только от x, $\mu=\mu(x)$. Тогда:

$$2\mu y=2y\frac{d\mu}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\mu}{\mu}=dx \qquad \Rightarrow \qquad \mu=e^x.$$

Домножив исходное уравнение на интегрирующий множитель, будем иметь:

$$e^x\left(x^2+y^2+2x\right)dx+2ye^x dy=0;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2ye^x; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2ye^x; \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\left(x^2+y^2+2x\right) \qquad \Rightarrow \qquad u=\int e^x x^2 dx+\int e^x y^2 dx+\int 2xe^x dx+\varphi(y)=$$

$$\left\|\begin{array}{c|c} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{array}\right\|=x^2e^x-2\int xe^x dx+\int e^x y^2 dx+2\int xe^x dx+\varphi(y)=$$

$$=x^2e^x+y^2e^x+\varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2ye^x+\varphi'(y)=2ye^x \qquad \Rightarrow \qquad \varphi'(y)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(y)=0;$$

$$u=x^2e^x+y^2e^x=C \text{ •}$$

б) $(x\sin y+y\cos y)dx+(x\cos y-y\sin y)dy=0$

• $\dfrac{\partial P}{\partial y}=x\cos y+\cos y-y\sin y$; $\qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\cos y$; $\qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

$$P=\mu(x\sin y+y\cos y); \qquad Q=\mu(x\cos y-y\sin y); \qquad \mu=\mu(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x\sin y+y\cos y)]=\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x\cos y-y\sin y)] \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}[x\sin y+y\cos y]+\mu(x\cos y-y\sin y+\cos y)=\frac{\partial \mu}{\partial x}[x\cos y-y\sin y]+\mu\cos y;$$

$$\mu=\mu(x)$$

$$\mu(x\cos y-y\sin y+\cos y)=\frac{d\mu}{dx}[x\cos y-y\sin y]+\mu\cos y \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{d\mu}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{d\mu} = dx \quad \Rightarrow \quad \mu = e^x;$$

$$P = (x\sin y + y\cos y)e^x; \qquad Q = (x\cos y - y\sin y)e^x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x\sin y + y\cos y)e^x \quad \Rightarrow \quad u = \int e^x x\sin y dx + \int e^x y\cos y dx + \varphi(y) =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = e^x \sin y dx & v = \sin y \cdot e^x \end{array} \right\| = xe^x \sin y - e^x \sin y + e^x y\cos y + \varphi(y) =$$

$$= e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y) + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(x\cos y - \cos y + \cos y - y\sin y) + \varphi'(y);$$

$$e^x(x\cos y - \cos y + \cos y - y\sin y) + \varphi'(y) = e^x(x\cos y - y\sin y) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = 0;$$

$$u = e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y) = C \bullet$$

7) $y(1 + xy)dx - xdy = 0$ *(решить на самостоятельной работе)*

$$\bullet \ \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + xy + xy = 1 + 2xy; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1; \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$P = \mu(y(1 + xy)); \qquad Q = -\mu x; \qquad \mu = \mu(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu y(1 + xy)] = \frac{\partial}{\partial x}[-\mu x] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial y}[y(1 + xy)] + \mu(1 + xy + xy) = \frac{\partial \mu}{\partial x}[-x] - \mu;$$

$$\mu = \mu(x)$$

$$\mu(1 + 2xy) = \frac{d\mu}{dx}(-x) - \mu \quad \Rightarrow \quad \mu(2 + 2xy) = -\frac{d\mu}{dx}x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\mu}{d\mu} = -\frac{2 + 2xy}{x}dx$$

$\mu = \mu(x)$ не подходит (уравнение содержит три переменных x, y, μ и не может быть решено).

Предположим, что μ функция только от y, $\mu = \mu(y)$. Тогда:

$$\frac{d\mu}{dy}y(1 + xy) + \mu(2 + 2xy) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{dy}y = -2\mu \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = -2\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln|\mu| = -2\ln|y| \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{y^2}.$$

Тогда

$$\mu P = \frac{1 + xy}{y}; \qquad \mu Q = -\frac{x}{y^2};$$

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{xy-1-xy}{y^2}; \qquad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}=\frac{-1}{y^2}; \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1+xy}{y}=\frac{1}{y}+x \qquad \Rightarrow \qquad u=\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+\varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-x}{y^2}+\varphi'(y); \qquad \frac{-x}{y^2}+\varphi'(y)=\frac{-x}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi(y)=0;$$

$$u=\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C \bullet$$

186. $2xy\,\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y=0.$

187. $(2-9xy^2)\,x\,\mathrm{d}x+(4y^2-6x^3)\,y\,\mathrm{d}y=0.$

188. $\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x-(2y+x\mathrm{e}^{-y})\,\mathrm{d}y=0.$

189. $\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x+(y^3+\ln x)\,\mathrm{d}y=0.$

190. $\frac{3x^2+y^2}{y^2}\,\mathrm{d}x-\frac{2x^3+5y}{y^3}\,\mathrm{d}y=0.$

191. $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)\mathrm{d}x-\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y=0.$

192. $(1+y^2\sin 2x)\,\mathrm{d}x-2y\cos^2 x\,\mathrm{d}y=0.$

193. $3x^2(1+\ln y)\,\mathrm{d}x=\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)\mathrm{d}y.$

194. $\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)\mathrm{d}x+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}\,\mathrm{d}y=0.$

Решить уравнения **195—220**, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных.

195. $(x^2 + y^2 + x)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0.$

196. $(x^2 + y^2 + y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0.$

197. $y\,\mathrm{d}y = (x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x)\sqrt{1 + y^2}.$

198. $xy^2(xy' + y) = 1.$

199. $y^2\,\mathrm{d}x - (xy + x^3)\,\mathrm{d}y = 0.$

200. $\left(y - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}y}{y} = 0.$

201. $(x^2 + 3\ln y)y\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y.$

202. $y^2\,\mathrm{d}x + (xy + \operatorname{tg} xy)\,\mathrm{d}y = 0.$

203. $y(x + y)\,\mathrm{d}x + (xy + 1)\,\mathrm{d}y = 0.$

204. $y(y^2 + 1)\,\mathrm{d}x + x(y^2 - x + 1)\,\mathrm{d}y = 0.$

205. $(x^2 + 2x + y)\,\mathrm{d}x = (x - 3x^2y)\,\mathrm{d}y.$

206. $y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 2x^3 \operatorname{tg} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x.$

207. $y^2\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x - y)\,\mathrm{d}y = 0.$

208. $xy\,\mathrm{d}x = (y^3 + x^2y + x^2)\,\mathrm{d}y.$

209. $x^2y(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = 2y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y.$

210. $(x^2 - y^2 + y)\,\mathrm{d}x + x(2y - 1)\,\mathrm{d}y = 0.$

211. $(2x^2y^2 + y)\,\mathrm{d}x + (x^3y - x)\,\mathrm{d}y = 0.$

212. $(2x^2y^3 - 1)y\,\mathrm{d}x + (4x^2y^3 - 1)x\,\mathrm{d}y = 0.$

213. $y(x + y^2)\,\mathrm{d}x + x^2(y - 1)\,\mathrm{d}y = 0.$

214. $(x^2 - \sin^2 y)\,\mathrm{d}x + x\sin 2y\,\mathrm{d}y = 0.$

215. $x(\ln y + 2\ln x - 1)\,\mathrm{d}y = 2y\,\mathrm{d}x.$

216. $(x^2 + 1)(2x\,\mathrm{d}x + \cos y\,\mathrm{d}y) = 2x\sin y\,\mathrm{d}x.$

217. $(2x^3y^2 - y)\,\mathrm{d}x + (2x^2y^3 - x)\,\mathrm{d}y = 0.$

218. $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0.$

219. $(x^2 - y)\,\mathrm{d}x + x(y + 1)\,\mathrm{d}y = 0.$

220. $y^2(y\,\mathrm{d}x - 2x\,\mathrm{d}y) = x^3(x\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}x).$