ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$\boxed{y' = p(x)y + q(x)}$$

1) $y'+2xy = xe^{-x^2}$

• Решение будем искать в виде:

$y = u(x)v(x) \qquad \Rightarrow \qquad y' = u'v + uv'$

$u'v + uv'+2x(uv) = xe^{-x^2} \qquad \Rightarrow \qquad v(u'+2xu) + uv' = xe^{-x^2}$

Одну из функций можно выбрать произвольно. Подберем ее таким образом, чтобы уравнение максимально упрощалось. С этой целью потребуем, чтобы выражение в скобках равнялось нулю. Получаем вспомогательное дифференциальное уравнение:

$u' + 2xu = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{u} = -2xdx \qquad \Rightarrow \qquad \ln|u| = -x^2 \;\Rightarrow\; \underline{u = e^{-x^2}}$

При нахождении функции u достаточно получить какое-либо частное решение максимально простого вида. С этой целью при интегрировании положили константу $C = 0$. Вернемся в основное уравнение.

$e^{-x^2}v' = xe^{-x^2} \qquad \Rightarrow \qquad v' = x \qquad \Rightarrow \qquad \underline{v = \frac{x^2}{2} + C}$

Тогда общее решение примет вид:

$y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$ •

2) $(1+x^2)\,y' = 2xy + (1+x^2)^2$

• $(1+x^2)(u'v + uv') = 2xuv + (1+x^2)^2$

$(1+x^2)u'v + (1+x^2)uv' - 2xuv = (1+x^2)^2$

$v((1+x^2)u' - 2xu) + (1+x^2)uv' = (1+x^2)^2$

$(1+x^2)u' - 2xu = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{u} = 2x\frac{dx}{1+x^2} \qquad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \ln|u| = \ln\left|1+x^2\right| \quad \Rightarrow \quad \underline{u = 1+x^2}$$

$$(1+x^2)(1+x^2)v' = (1+x^2)^2 \quad \Rightarrow \quad v' = 1 \;\Rightarrow \quad \underline{v = x+C}$$

$$y = (x+C)(1+x^2) \bullet$$

3) $y' + 2y = e^{3x}$

$$\bullet\ (u'v+uv') + 2uv = e^{3x} \quad \Rightarrow \quad v(u'+2u) + uv' = e^{3x}$$

$$u' + 2u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -2dx \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = -2x \quad \Rightarrow \quad \underline{u = e^{-2x}}$$

$$e^{-2x}v' = e^{3x} \Rightarrow v' = e^{5x} \quad \Rightarrow \quad \underline{v = \frac{1}{5}e^{5x} + C}$$

$$y = \left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right)e^{-2x} \bullet$$

4) $y' = \dfrac{2y}{x+1} + e^x(x+1)^2$

$$\bullet\ (u'v+uv') = \frac{2uv}{x+1} + e^x(x+1)^2 \;\Rightarrow \quad v\left(u' - \frac{2u}{x+1}\right) + uv' = e^x(x+1)^2$$

$$u' - \frac{2u}{x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{2}{x+1}dx \Rightarrow \quad \ln|u| = 2\ln|x+1| \quad \Rightarrow \quad \underline{u = (x+1)^2}$$

$$(x+1)^2 v' = e^x(x+1)^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{v = e^x + C}$$

$$y = (x+1)^2(e^x + C) \bullet$$

5) $y' = \dfrac{y}{x+y^3}$

$\bullet$ В некоторых случаях, когда исходное дифференциальное уравнение не является линейным относительно функции $y = y(x)$, его можно пытаться рассматривать как линейное относительно функции $x = x(y)$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + y^2, \qquad x = u(y)v(y)$$

$$u'v+uv'=\frac{uv}{y}+y^2 \qquad \Rightarrow \qquad v(u'-\frac{u}{y})+uv'=y^2$$

$$u'=\frac{u}{y} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{u}=\frac{dy}{y} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{u=y}$$

$$yv'=y^2 \qquad \Rightarrow \qquad v'=y \qquad \Rightarrow \qquad \underline{v=\frac{y^2}{2}+C}$$

$$x=\left(\frac{y^2}{2}+C\right)y \bullet$$

6) $(1+y^2)dx=(arctg\,y-x)dy$

$$\bullet\ \frac{dx}{dy}=\frac{arctg\,y-x}{1+y^2} \qquad , \qquad x=u(y)v(y)$$

$$u'v+uv'=\frac{arctg\,y-uv}{1+y^2}=\frac{arctg\,y}{1+y^2}-\frac{uv}{1+y^2} \qquad \Rightarrow \qquad v(u'+\frac{u}{1+y^2})+uv'=\frac{arctg\,y}{1+y^2}$$

$$u'=-\frac{u}{1+y^2} \Rightarrow \qquad \frac{du}{u}=-\frac{dy}{1+y^2} \qquad \Rightarrow \qquad \ln|u|=-arctg\,y \qquad \Rightarrow \underline{u=e^{-arctg\,y}}$$

$$e^{-arctg\,y}v'=\frac{arctg\,y}{1+y^2} \qquad \Rightarrow \qquad v'=\frac{arctg\,y}{1+y^2}e^{arctg\,y}$$

$$v=\int\frac{arctg\,y}{1+y^2}e^{arctg\,y}dy=\int arctg\,y\,e^{arctg\,y}d(arctg\,y)$$

$\|arctg\,y=z$

$$\int ze^z dz=\left\|\begin{array}{l|l} u=z & du=dz \\ dv=e^z dz & v=e^z \end{array}\right\|=$$

$$=ze^z-\int e^z dz=ze^z-e^z+C=e^z(z-1)+C \ \ \|$$

$$x=e^{-arctg\,y}(e^{arctg\,y}(arctg\,y-1)+C)=arctg\,y-1+C\cdot e^{-arctg\,y} \bullet$$

137. $(2x+1)y' = 4x + 2y.$

138. $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x.$

139. $(xy + \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0.$

140. $x^2y' + xy + 1 = 0.$

141. $y = x(y' - x\cos x).$

142. $2x(x^2 + y)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y.$

143. $(xy' - 1)\ln x = 2y.$

144. $xy' + (x+1)y = 3x^2\mathrm{e}^{-x}.$

145. $(x + y^2)\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x.$

146. $(2\mathrm{e}^y - x)y' = 1.$

147. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1.$

148. $(2x + y)\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x + 4\ln y\,\mathrm{d}y.$

149. $y' = \frac{y}{3x - y^2}.$

150. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1).$

151. $y' + 2y = y^2\mathrm{e}^x.$

152. $(x+1)(y' + y^2) = -y.$

153. $y' = y^4\cos x + y \operatorname{tg} x.$

154. $xy^2y' = x^2 + y^3.$

155. $xy\,\mathrm{d}y = (y^2 + x)\,\mathrm{d}x.$

156. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y.$

157. $xy' + 2y + x^5y^3\mathrm{e}^x = 0.$

158. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}.$

159. $y'x^3\sin y = xy' - 2y.$

160. $(2x^2y\ln y - x)y' = y.$