СЛУЧАЙ МАЛОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра утверждает, что решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), \mu]$$

непрерывно зависит от параметра μ, если в рассматриваемой замкнутой области изменения t, x и μ функция f непрерывна по совокупности параметров и удовлетворяет условию Липшица по x:

$$\left| f(t, \bar{x}, \mu) - f(t, x, \mu) \right| \le N \left| \bar{x} - x \right|, \text{ где } N = \text{const},$$

где N не зависит от t, x и μ.

В задачах физики и механики условия этой теоремы обычно выполнены, однако один случай разрывной зависимости правой части от параметра встречается в приложениях сравнительно часто.

Рассмотрим уравнение

$$\mu \frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

где μ – малый параметр.

Задача заключается в том, чтобы выяснить, можно ли при малых значениях $x(\mu)$ пренебречь членом $\mu \dfrac{dx}{dt}$, т.е. приближенно заменить решение уравнения (1) решением, так называемого ***вырожденного*** уравнения

$$f(t, x) = 0. \tag{2}$$

Мы не можем здесь воспользоваться теоремой о непрерывной зависимости решения от параметра, т.к. правая часть уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\mu} f(t, x) \tag{1′}$$

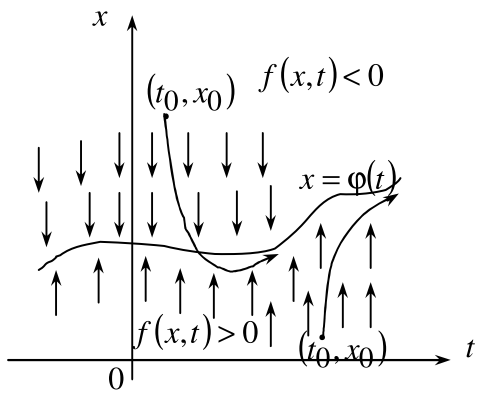
разрывна при $\mu = 0$.

Предположим пока для упрощения, что вырожденное уравнение (2) имеет лишь одно решение

$$x = \varphi(t),$$

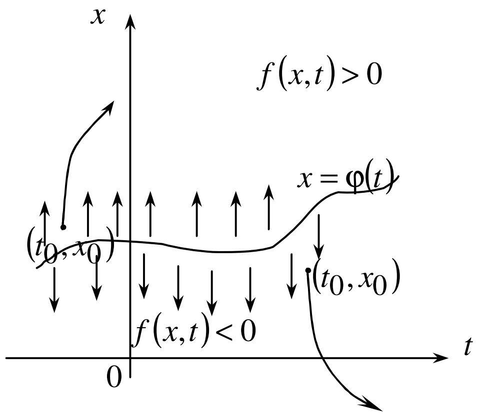
предположим также для определенности, что $\mu > 0$. При $\mu \to 0$ производная $\frac{dx}{dt}$ решения уравнения (1′) $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\mu} f(t, x)$ в каждой точке, в которой $f(t,x) \neq 0$, будет неограниченно возрастать по абсолютной величине, имея знак, совпадающий со знаком функции $f(t,x)$. Следовательно, касательные к интегральным кривым во всех точках, в которых $f(t,x) \neq 0$, стремятся при $\mu \to 0$ к направлению, параллельному оси Ox, причем если $f(t,x) > 0$, то решение $x(t,\mu)$ уравнения (1′) возрастает с ростом t, т.к. $\frac{dx}{dt} > 0$, а если $f(t,x) > 0$, то решение $x(t,\mu)$ убывает с ростом t, т.к. $\frac{dx}{dt} < 0$.

Рассмотрим на рисунке случай а), при котором знак функции $f(t,x)$ с возрастанием x при фиксированном t меняется при переходе через график решения $x = \varphi(t)$ вырожденного уравнения с + на –.



а)

Стрелками показано поле направлений касательных к интегральным кривым при достаточно малом μ. Поле направлений устремлено к графику корня вырожденного уравнения. Поэтому каковы бы ни были начальные значения $x(t_0) = x_0$, интегральная кривая, определяемая этими начальными значениями, будучи почти параллельной оси Ox, устремляется к графику корня вырожденного уравнения и при возрастании t уже не может покинуть окрестность этого графика. Следовательно, в этом случае при $t \geq t_1 > t_0$ при достаточно малом μ можно приближенно заменить решение $x(t,\mu)$ уравнения (1) решения вырожденного уравнения. В рассматриваемом случае решение $x = \varphi(t)$ вырожденного уравнения называется ***устойчивым***.

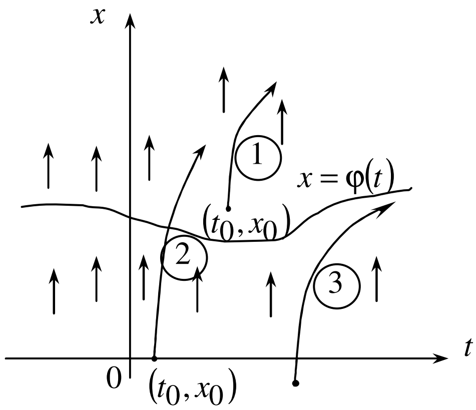


b)

Рассмотрим случай b) – знак функции $f(t,x)$ при переходе через график решения $x = \varphi(t)$ вырожденного уравнения с возрастанием x при фиксированном t изменяется с $-$ на +. На рисунке изображено поле направлений касательных к интегральным кривым при достаточно малом μ. В этом случае очевидно, что каковы бы ни были начальные значения $x(t_0) = x_0$, удовлетворяющие лишь условию $f(t_0, x_0) \neq 0$, интегральная кривая, определяемая этими значениями, при достаточно малом μ, имея почти параллельную оси Ox касательную, удаляется от графика решения $x = \varphi(t)$ вырожденного уравнения. В этом случае решение $x = \varphi(t)$ уравнения (2) называется ***неустойчивым***. В неустойчиво случае нельзя заменить решение $x = x(t,\mu)$ исходного уравнения решением вырожденного уравнения, другими словами, нельзя пренебречь членом $\mu \dfrac{dx}{dt}$ в уравнении (1) как бы мало μ ни было.

Возможен еще третий, так называемый полуустойчивый случай c): знак функции $f(t,x)$ при переходе через график решения вырожденного уравнения не изменяется.

На рисунке изображено поле направлений в случае полуустойчивого решения $x = \varphi(t)$.

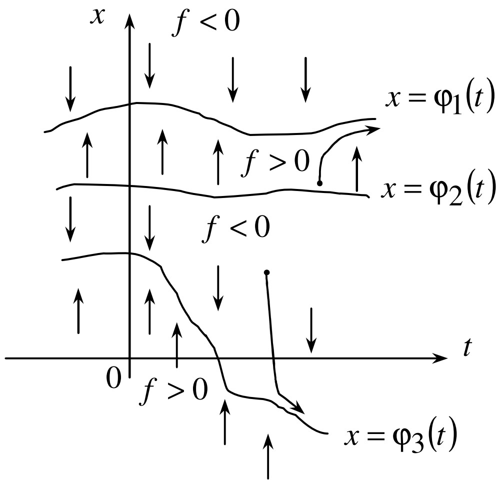


c)

В полуустойчивом случае, как правило, нельзя приближенно заменить решение исходного уравнения $x = x(t,\mu)$ решением вырожденного уравнения, так как: во-первых, интегральные кривые, определяемые начальными значениями, лежащими с одной стороны от графика решения $x = \varphi(t)$, удаляются от него; во-вторых, интегральные кривые, приближающиеся к графику решения $x = \varphi(t)$, могут перейти через него на неустойчивую сторону и после этого удалиться от графика $x = \varphi(t)$. Наконец, если даже интегральная кривая $x = x(t,\mu)$ остается в окрестности графика решения с его устойчивой стороны, то неизбежные в практических задачах возмущения могут перебросить график решения $x = x(t,\mu)$ на неустойчивую сторону графика решения вырожденного уравнения, после чего интегральная кривая $x = x(t,\mu)$ удалится от графика решения $x = \varphi(t)$.

Заметим, что если на графике решения вырожденного уравнения $\frac{\partial t}{\partial x} < 0$, то заведомо решения $x = \varphi(t)$ устойчиво; если же $\frac{\partial t}{\partial x} > 0$, то решение $x = \varphi(t)$ неустойчиво, так как в первом случае в окрестности кривой $x = \varphi(t)$ функция f убывает с возрастанием x и, следовательно, меняет знак с + на –, а во втором случае возрастает с ростом x и, значит при переходе через график решения $x = \varphi(t)$ функция f меняет знак с – на +.

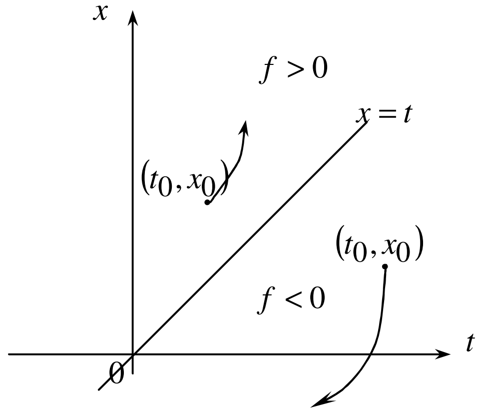
Если вырожденное уравнение имеет несколько решений $x = \varphi_i(t)$, то каждое из них должно быть исследовано на устойчивость, причем в зависимости от выбора начальных значений интегральные кривые исходного уравнения могут вести себя при $\mu \to 0$ различно.



Например, в случае трех решений $x = \varphi_i(t)$ ($i = 1,2,3$) вырожденного уравнения, графики которых не пересекаются, решения $x = x(t, \mu)$, $\mu \to 0$, исходного уравнения, определяемые начальными точками, лежащими выше графика функции $x = \varphi_2(t)$, стремятся при $t > t_0$ и $\mu \to 0$ к устойчивому решению вырожденного уравнения $x = \varphi_1(t)$, а решения $x = x(t, \mu)$, определяемые начальными точками, лежащими ниже графика функции $x = \varphi_2(t)$, стремятся при $t > t_0$ и $\mu \to 0$ к устойчивому решению $x = \varphi_3(t)$ вырожденного уравнения.

Пример 1. Выяснить, стремится ли решение $x = x(t, \mu)$ уравнения $\mu \dfrac{dx}{dt} = x - t$, $\mu > 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x_0$ к решению вырожденного уравнения $x - t = 0$ при $t > t_0$ и $\mu \to 0$.

Решение: $x = x(t, \mu)$ не стремится к решению вырожденного уравнения $x = t$, так как решение вырожденного уравнения ***неустойчиво***, потому что $\dfrac{\partial(x - t)}{\partial x} = 1 > 0$.



Пример 2. Выяснить, стремится ли решение $x = x(t, \mu)$ уравнения $\mu \dfrac{dx}{dt} = \sin^2 t - 3e^x$, $\mu > 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x_0$ к решению вырожденного уравнения $x - t = 0$ при $t > t_0$ и $\mu \to 0$.

Решение: вырожденное уравнение $x = 2\ln|\sin t| - \ln 3$ ***устойчиво***, так как $\dfrac{\partial\left(\sin^2 t - 3e^x\right)}{\partial x} = -3e^x < 0$.

Следовательно, решение исходного уравнения $x = x(t, \mu)$ для $t > t_0$ при $\mu \to 0$.

Вопрос о зависимости решения от малого коэффициента μ при старшей производной возникает и для уравнений n-го порядка

$$\mu x^{(n)} = f\left(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}\right)$$

и для систем дифференциальных уравнений.

Уравнение n-го порядка может быть сведено к системе уравнений первого порядка и, следовательно, основная задача заключается в исследовании систем уравнений первого порядка с одним или несколькими малыми коэффициентами при производных.

Эта задача подробно исследовалась А.Н. Тихоновым и А.Б. Васильевой.