ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Операционное (символическое) исчисление применяется для решения линейных дифференциальных уравнений обыкновенных и с частными производными, дифференциально-разностных уравнений и линейных интегральных уравнений, к которым сводятся прикладные задачи электротехники, механики, импульсной техники и других отраслей знаний.

Известный ученый в области теории колебаний и автоматического управления А.А. Андропов (1901-1952) считал, что операционное исчисление является азбукой современной автоматики и телемеханики.

О значении операционного исчислений английский математик Э.Т. Уиттекер писал: «Мы должны считать операционное исчисление наряду с открытием Пуанкаре автоморфных функций и открытием Риччи тензорного исчисления трения наиболее важными успехами математики за последнюю четверть девятнадцатого века».

Метод символического исчисления основан на том, что над оператором дифференцирования $\frac{d}{dt}=p$ и некоторыми функциями $X=X(p)$ этого оператора производится определенная система действий, соответствующая действиям анализа: дифференцированию функции $x(t)=X(p)$ соответствует умножение оператора p на функцию $X(p)$:

$$\frac{dx}{dt}\to pX(p),\quad \frac{d^2x}{dt^2}\to p^2X(p),\ldots,\frac{d^nx}{dt^n}\to p^nX(p),\tag{1}$$

а интегрированию – деление функции $X(p)$ на оператор p:

$$\int_0^t x(t)dt\to\frac{X(p)}{p},\quad \int_0^t dt\int_0^t x(t)dt\to\frac{X(p)}{p^2},\quad \ldots,\quad \int_0^t dt\int_0^t dt\ldots\int_0^t x(t)dt\to\frac{X(p)}{p^n},$$

в частности,

$$\frac{1}{p}\to\int_0^t dt=t,\quad \frac{1}{p^2}\to\int_0^t dt\int_0^t dt=\frac{t^2}{2!},\quad \ldots,\quad \frac{1}{p^n}=\frac{t^n}{n!}.\tag{2}$$

При помощи операционного метода линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами искомой функции $x(t)$ сводятся к алгебраическим уравнениям относительно функции $X(p)$.

Для примера рассмотрим решение дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} - x = 1$ при начальном условии $x(0) = 0$.

На основании (1) получаем

$$pX(p) = \frac{dx}{dt}$$

$$x(t) = \int pX(p)dt$$

$$pX(p) - X(p) = 1,$$

отсюда

$$X(p) = \frac{1}{p-1}$$

или

$$X(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + ... + \frac{1}{p^n} + ...\right) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

По формуле (2) находи искомую функцию $x(t)$. Имеем

$$p\int x(t)dt \to X(p)$$

$$pX(p) = \frac{dx}{dt}$$

$$x = \int p(x)(p)$$

$$x(t) = \int_0^1 \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + ... + \frac{t^n}{n!} + ...\right)dt = \int_0^t e^t dt = e^t - 1.$$

Подстановкой проверяем, что $x(t) = e^t - 1$ при $x(0) = 0$ является решением данного уравнения.

Операционное исчисление начали развивать в своих работах Лейбниц (1646-1716), Эйлер (1707-1783), Лагранж (1736-1813), Лаплас (1749-1827), Фурье (1768-1830), Коши (1789-1857).

Английский ученые Оливер Хевисайд (1850-1925) вводит в символическое исчисление правила действия с оператором $\frac{d}{dt} = p$ и функциями этого оператора. Однако он ввел эти соотношения чисто формально без соответствующего математического обоснования.

Строгое математическое обоснование на основе интегральных преобрахований дано в работах Д. Карсона, Бромвича, Леви, Вандер Поля и др.

Преобразование

$$F(p) = \int_a^b f(t) K(t, p) dt,$$

где $K(t, p)$ – ***ядро преобразования***, называется ***интегрированным***.

Вид преобразования и характер задач, к которым оно применимо, зависят от выбора ядра и пределов интегрирования.

Если $K(t, p) = e^{-pt}$, $a = -\infty$, $b = \infty$, то получим ***преобразование Лапласа***

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

которое преобразовывает определенный класс функций-оригиналов $f(t)$ действительного переменного t в функции-изображения $F(p)$ комплексного переменного p.

Широко используются интегральные преобразования Бесселя, Меллина, синус-преобразование, косинус-преобразование, ядра $K(t, p)$ которых представляют собой соответственно функции $I_0(t)$, t^{p-1}, $\sin t$, $\cos t$.

Преобразование

$$F(p) = \int_a^b e^{-pt} f(t) dt$$

впервые (1737) ввел Эйлер. Лапласом были выяснены (1782) свойства этого преобразования, а также введены бесконечные пределы интегрирования, что позволило применить преобразование Эйлера-Лапласа в приложениях.

Американский ученый Карсон показал (1926) связь между операционным исчислением и интегральным преобразованием Лапласа, установил соотношение между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ получил английский математик Бромвич (1875-1930) в виде контурного интеграла

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}\,\frac{F(p)}{p}\,dp$$

в комплексной области $p=s+i\sigma$, где интегрирование ведется по любой прямой, параллельной мнимой оси плоскости и расположенной вправо от всех особых точек функции

$$\frac{1}{p}F(p).$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Оригиналом называется комплексная функция $f(t)=u(t)+iv(t)$ действительного переменного t, удовлетворяющая условиям:

1) $f(t)$ – однозначная непрерывная или кусочно-непрерывная функция вместе со своими производными n-го порядка в интервале $(-\infty,\infty)$;

2) $f(t)=0$ при $t<0$;

3) существуют такие числа $M>0$ и $S>0$, что для всех $t<0$

$$|f(t)|<Me^{st}.$$

Число $S_0>0$, для которого неравенство в условии 3) выполняется при любом $S=S_0+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ и не выполняется при $S=S_0-\varepsilon$ (S_0 – точная нижняя граница чисел S), называется ***показателем роста*** функции $f(t)$.

Функции-оригиналы $f(t)$ при $t\to\infty$ являются или оригинальными, или стремящимися к бесконечности, но не быстрее, чем показательная функция $e^{S_0 t}$. Их называют функциями ***экспоненциального типа***.

На функцию-оригинал можно накладывать более общие условия, рассматривая и функции бесконечных разрывов в n точках на любом интервале конечной длины и предполагая, что в этих точках функции абсолютно интегрируемы.

Изображением функции-оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p=s+i\sigma$, $s=\operatorname{Re}p$, $\sigma=\operatorname{Im}p$, определяемая интегралом Лапласа

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt.$$

ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Теорема. Если функция $f(t)$ – оригинал с показателем роста S_0, то функция $F(p)$ сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} p > S_0$ и является в ней аналитической функцией.

Доказательство: 1. Имеем $|f(t)| < Me^{S_0 t}$ и $\operatorname{Re} p > S_0$. Тогда

$$|F(p)| \le \int_0^\infty \left| e^{-pt} f(t) dt \right| < M \int_0^\infty e^{-St} e^{S_0 t} dt$$

или

$$|F(p)| < \frac{M}{S - S_0}, \quad \operatorname{Re} p = S - S_0 .$$

Следовательно, функция $F(p)$ существует в области $\operatorname{Re} p > S_0$ (рис. 1).

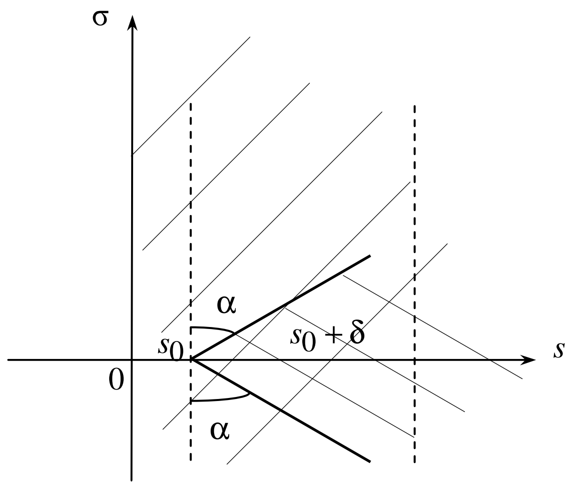


Рис. 1

Теорема (необходимый признак). Если функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$ с показателем роста S_0, то $\lim F(p) = 0$.

Теорема. Интеграл Лапласа $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ сходится равномерно в области D: $\operatorname{Re} p > S_0$ и $|\arg(p - S_0 - \delta)| \le \frac{\pi}{2} - \alpha$, где $\alpha > 0$, $\delta > 0$ – малые числа.

По формуле $F(p)=\int\limits_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt$ каждой функции $f(t)$ ставится в соответствие определенная функция $F(p)$, аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > S_0$. Это соответствие называется ***преобразованием Лапласа***.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ будем записывать символом $f(t) \to F(p)$ или $F(p) \to f(t)$; пользуются также символами: $F(p)=L\{f(t)\}$, $f(t)=L^{-1}\{F(p)\}$; $f(t)]F(p)$, $F(p)\div\to f(t)$ и др.

В преобразовании Лапласа оригинал обозначается, как правило малой буквой, например $x(t) \to X(p)$, $\varphi(t) \to \Phi(t)$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КАРСОНА-ХЕВИСАЙДА

В операционном исчислении используется еще ***изображение по Карсону-Хевисайду***, определяемое равенством

$$\Phi(p) = p\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt,$$

которое отличается от изображения по Лапласу только множителем p.

Все формулы одного преобразования получают из формул другого умножением или делением на p.

В современной технической литературе в основном пользуются изображением по Лапласу, так как общность преобразований Фурье и Лапласа связывает операционное исчисление с гармоническим анализом и таким образом вносит физический смысл в понятие изображения (изображение по Лапласу $F(s+i\sigma)$ – это спектральная функция затухающей функции $e^{-pt}f(t)$, для которой переменная σ является частотой).

Единичная функция Хевисайда

Функция-оригинал

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$\left(\eta(0) = \dfrac{1}{2}, \lim\limits_{t \to 0+0} \eta(t) = 1\right)$ ***называется единичной функцией Хевисайда***.

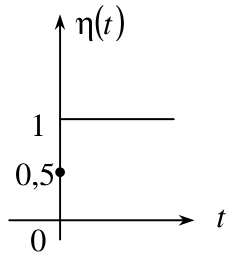


Рис. 2

Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию оригинала 1) и 3), то функция

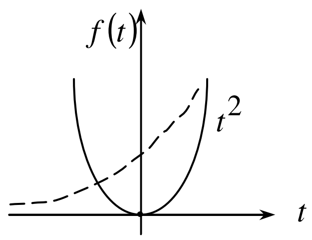
$$f(t)\eta(t)=\begin{cases} f(t), & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

удовлетворяет всем условиям оригинала.

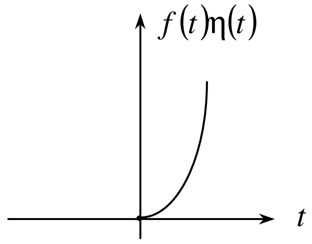
Например, функция $f(t)=t^2$ непрерывна в интервале $(-\infty,\infty)$ и при $t>0$ является функцией экспоненциального типа ($M=1$, $S_0=1$) $t^2<e^t$, так как $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^n}{a^t}=0$, но при $t<0$, $f(t)=t^2\neq 0$. Тогда

$$f(t)\eta(t)=\begin{cases} t^2, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

является оригиналом (б).



а)



б)

Рис. 3

Для сокращения пишут $f(t)$ вместо $f(t)\eta(t)$, условившись, что все функции, удовлетворяющие условию оригинала 1) и 3) равны нулю при $t<0$. Это объясняется физическим смыслом задач, приводящих к дифференциальным уравнениям с начальными условиями, которые, естественно, задаются в момент $t=0$. Следовательно, процесс исследуется только в интервале $0\le t<\infty$, поэтому не имеет значения, какой физический процесс описывает искомая функция до начального момента при $t<0$.

ИЗОБРАЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

1. Изображение единичной функции $\eta(t)$.

По формуле

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

получаем

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\eta(t)dt=\lim_{a\to\infty}\int_0^\infty e^{-pt}=\lim_{a\to\infty}\left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^a=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-pa}\right).$$

Если $\operatorname{Re} p>0$, то $\lim\limits_{a\to\infty}e^{-pt}=0$. Следовательно,

$$\boxed{1\to\frac{1}{p}},\ \operatorname{Re} p>0.$$

2. Изображение функции e^{at}.

По формуле $F(p)$ имеем

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}e^{at}dt=\lim_{a\to\infty}\int_0^\infty e^{-(p-a)t}dt=\lim_{a\to\infty}\frac{\left.e^{-(p-a)t}\right|_0^a}{p-a}=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{p-a}-\frac{e^{-(p-a)a}}{p-a}\right).$$

Если $\operatorname{Re}(p-a)>0$, то $\lim\limits_{a\to\infty}e^{-(p-a)a}=0$. Таким образом,

$$\boxed{e^{at}\to\frac{1}{p-a}},\ \operatorname{Re} p>\operatorname{Re} a.$$

3. Гамма-функция.

Гамма-функция определяется интегралом

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt,\quad s>0. \tag{*}$$

Представим

$$\Gamma(s)=\int_0^1 e^{-t}t^{s-1}dt+\int_1^\infty e^{-t}t^{s-1}dt.$$

Интеграл

$$\int_0^1 e^{-t}t^{s-1}dt < \int_0^1 t^{s-1}dt = \left.\frac{t^s}{s}\right|_0^1$$

равномерно сходится при $t \to 0$, если $s > 0$.

Из неравенства

$$t^{s+1} < e^t \left(\lim_{t\to\infty} \frac{t^{s+1}}{e^t} = 0 \right)$$

или

$$e^{-t}t^{s-1} < \frac{1}{t^2}$$

следует, что интеграл

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{s+1}dt < \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 1$$

равномерно сходится для всех s.

Таким образом, $\Gamma(s)$ – непрерывная функция от $s > 0$.

Интегрируя правую часть (*) гамма-функции $\Gamma(s+1)$ по частям ($u = t^s$, $dv = e^{-t}dt$), получаем формулу приведения:

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^s dt = \left(-e^{-t}t^s\right|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt$$

или

$$\boxed{\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)} \qquad (**)$$

Пользуясь (**), получим

$$\Gamma(s+k) = s(s-1)(s-2)\ldots(s-k)\Gamma(s-k), \quad k < s.$$

Для натурального числа $s = n$

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots2\cdot1\cdot\Gamma(1) = n!,$$

так как

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1.$$

Найдем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\int_0^\infty e^{-\tau^2}dt=\sqrt{\pi}\,.$$

Из формулы (**) получаем:

$$\boxed{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}=\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot n!}\sqrt{\pi}} \qquad \text{(a)}$$

$$\boxed{\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^n 2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\sqrt{\pi}=\frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}} \qquad \text{(a}'\text{)}$$

Функции

$$Q(x,p)=\int_x^\infty e^{-t}t^{p-1}dt=\Gamma(p,x)$$

и

$$P(x,p)=\int_0^x e^{-t}t^{p-1}dt=\Gamma(p)-\Gamma(p,x)=\gamma(h,x)$$

называются неполными гамма-функциями (функции Прима).

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Теорема. Если

$$\operatorname{Re} p>S_0$$

$$F'(p)\to tf(t)$$

$$F''(p)\to(-1)^2t^2f(t)$$

$$F(p)\to f(t),$$

то

$$(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)\to t^n f(t). \qquad (1)$$

Доказательство. Докажем сначала, что если $f(t)$ удовлетворяет условию

$$|f(t)|<Me^{S_0 t},$$

то интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}(-t)^n f(t)dt \tag{2}$$

существует.

По условию $|f(t)| < Me^{S_0 t}$, $p = a + ib$, $a > S_0$; при этом $a > 0$, $S_0 > 0$. Очевидно найдется такое $\varepsilon > 0$, что будет выполняться неравенство $a > S_0 + \varepsilon$. Так же доказывается, что существует интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-(a-\varepsilon)t} |f(t)| dt .$$

Оценим далее интеграл (2)

$$\int_0^{+\infty} \left| e^{-pt} t^n f(t) \right| dt = \int_0^{+\infty} \left| e^{-(p-\varepsilon)t} e^{-\varepsilon t} t^n f(t) \right| dt .$$

Так как функция $e^{-\varepsilon t} \cdot t^n$ ограничена и по абсолютной величине меньше некоторого числа N при любом значении $t > 0$, то можно написать

$$\int_0^{+\infty} \left| e^{-pt} t^n f(t) \right| dt < N \int_0^{+\infty} \left| e^{-(p-\varepsilon)t} f(t) \right| dt = N \int_0^{+\infty} e^{-(a-\varepsilon)t} |f(t)| dt < +\infty .$$

Таким образом доказано, что интеграл (2) существует. Но этот интеграл можно рассматривать как производную n-го порядка по параметру p от интеграла

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt .$$

Итак, из формулы

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

получим формулу

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} (-t)^n f(t) dt = \frac{d^n}{dp^n} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt .$$

Из этих двух равенств получаем

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n f(t)\,dt,$$

т.е. формулу (1).

Используя формулу (2) для нахождения изображения степенной функции.

Напишем, прежде всего

$$\boxed{1 \to \frac{1}{p}}.$$

Из этой формулы следует на основании (1)

$$(-1)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) \to t$$

или

$$\boxed{\frac{1}{p^2} \to t}.$$

Аналогично

$$\frac{2}{p^3} \to t^2$$

при любом n

$$\boxed{\frac{n!}{p^{n+1}} \to t^n}. \qquad (3)$$

Итак, дифференцированию изображения $F(p)$ соответствует в пространстве оригиналов действие умножения на $-t$ функции $f(t)$.

Пример 1. Из формулы

$$\frac{a}{p^2 + a^2} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin at\,dt$$

путем дифференцирования левой и правой частей по параметру p получим

$$\frac{2pa}{\left(p^2 + a^2\right)^2} \to t \sin at. \qquad (4)$$

Пример 2. Из формулы

$$\cos at \leftarrow \frac{p}{p^2 + a^2}$$

получаем

$$-\frac{a^2 - p^2}{\left(p^2 + a^2\right)^2} \to t\cos at\,. \tag{5}$$

Пример 3. Из формулы

$$\frac{1}{p + a} \to e^{-at}$$

на основании (1)

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) \to t^n f(t)$$

получаем

$$\frac{1}{(p + a)^2} \to te^{-at}\,. \tag{6}$$

или

1. $-t\sin at \to \left(\dfrac{a}{p^2 + a^2}\right)'$, $\qquad t\sin at \to \dfrac{2pa}{\left(p^2 + a^2\right)^2}$.

2. $-t\cos at \to \left(\dfrac{p}{p^2 + a^2}\right)'$, $\qquad t\cos at \to \dfrac{p^2 - a^2}{\left(p^2 + a^2\right)^2}$.

3. $-t\mathrm{sh}at \to \left(\dfrac{a}{p^2 - a^2}\right)'$, $\qquad t\mathrm{sh}at \to \dfrac{2pa}{\left(p^2 - a^2\right)^2}$.

4. $-t\mathrm{ch}at \to \left(\dfrac{p}{p^2 - a^2}\right)'$, $\qquad t\mathrm{ch}at \to \dfrac{p^2 + a^2}{\left(p^2 - a^2\right)^2}$.

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Теорема. Если

$$F(p) \to f(t),$$

то

$$pF(p) - f(0) \to f'(t). \tag{7}$$

Доказательство. На основании определения изображения можем написать

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\,dt. \tag{8}$$

Будем предполагать, что все производные $f'(t),\ f''(t), \ldots, f(n)(t)$, которые нам встретятся, удовлетворяют условию (1) и, следовательно интеграл (8) и аналогичные интегралы для последующих производных существуют. Вычисляя по частям интеграл, стоящий в правой части равенства (8), найдем

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\,dt = e^{-pt} f(t)\Big|_0^{+\infty} + p\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Но по условию (1)

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt} = 0,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt = F(p).$$

Поэтому

$$\boxed{L\{f'(t)\} = -f(0) + pF(p)}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим изображение производных любого порядка. Подставляя в формулу (7) вместо $F(p)$ выражение $pF(p) - f(0)$, а вместо $f(t)$ – выражение $f'(t)$, получаем

$$p[pF(p) - f(0)] - f'(0) \to f''(t)$$

или раскрывая скобки

$$p^2F(p)-pf(0)-f'(0)\to f''(t). \qquad (9)$$

Изображение для производной n-го порядка будет

$$p^nF(p)-\left[p^{n-1}f(0)+p^{n-2}f'(0)+\ldots+pf^{(n-2)}(0)+f^{(n-1)}(0)\right]\to f^{(n)}(t). \qquad (10)$$

Замечание. Формулы (7), (9), (10) упрощаются если

$$f(0)=f'(0)=f^{(n-1)}(0)=0.$$

В этом случае получаем

$$F(p)\to f(t),$$

$$pF(p)\to f'(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

$$p^nF(p)\to f^{(n)}(t).$$

Пример. Найдем изображение дифференциального выражения

$$x^{IV}(t)-5x'''(t)-4x''(t)+2x'(t)-x(t)+8$$

при условии: $x(0)=5$, $x'(0)=0$, $x''(0)=-1$, $x'''(0)=2$.

Обозначая $x(t)\to X(p)$ по теореме дифференцирования оригинала

$$x'(t)\to pX(p)-5,$$

$$x''(t)\to p^2X(p)-5p,$$

$$x'''(t)\to p^3X(p)-5p^2+1,$$

$$x^{IV}(t)\to p^4X(p)-5p^3+p-2.$$

Отсюда по свойству линейности, получаем

$$x^{IV}(t)-5x'''(t)-4x''(t)+2x'(t)-x(t)+8\to$$
$$\to p^4X(p)-5p^3+p-2-5\left(p^3X(p)-5p^2+1\right)-$$
$$-4\left(p^2X(p)-5p\right)-2(pX(p)-5)-X(p)-\frac{8}{p}=$$
$$=\left(p^4-5p^3-4p^2-2p-1\right)X(p)-5p^3+25p^2+21p-17-\frac{8}{p}.$$