# **Рівняння Ейлера**

Уравнения Эйлера. Уравнения вида

$$a_0 x^n y^{(n)}(x) + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_{n-1} x^n y'(x) + a_n y(x) = 0$$

называется уравнением Эйлера.

Эйлер предложил такую замену переменной, которая приводит это уравнение к уравнению с постоянными коэффициентами. Если принять замену

$$x = e^t \text{, то } \frac{dx}{dt} = e^t \text{ и тогда } \frac{dt}{dx} = e^{-t}.$$

Найдем производные функции $y(t)$.

Имеем $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}e^{-t} - \frac{dy}{dt}e^{-t}\frac{dt}{dx} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right);$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -2e^{-2t}\frac{dt}{dx}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + e^{-2t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}\frac{dt}{dx} - \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\right) =$$

$$= -2e^{-3t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2}\right) = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

и т.д.

$$\frac{d^ny}{dt^n} = \left[\frac{d^ny}{dt^2} + \beta_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \beta_2\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \ldots + \beta_{n-1}\frac{dy}{dt}\right]e^{-nt}.$$

Если заменить соответствующие производные и $x = e^{-t}$ в дифференциальном уравнении Эйлера, то получим

$$\frac{d^ny}{dt^n} + \alpha_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \alpha_2\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \ldots + \alpha_{n-1}\frac{dy}{dt} + \alpha_n y = 0.$$

Полученное уравнение есть уравнение с постоянными коэффициентами функции $y(t)$.

Решение дифференциального уравнения выбирается в виде $y(t)=e^{kt}$ или $y(x)=\left(e^{t}\right)^{k}=x^{k}$.

Вид решения $y=e^{kt}$ для уравнения с постоянными коэффициентами, а $y=x^{k}$ для исходного уравнения.

Для $y=e^{kt}$ характеристическое уравнение имеет вид

$$k^{n}+\alpha_1 k^{n-1}+\alpha_2 k^{n-2}+\ldots+\alpha_{n-1}k+\alpha_n=0.$$

Рассмотрим виды-структуры решений в зависимости от корней характеристического уравнения.

1. Пусть корни $k_i$ – действительные и различные, тогда

$$y_m(t)=C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t}+\ldots+C_me^{k_mt}, \text{ здесь } m<n.$$

Учитывая, что $x=e^{t}$, решение для $y(x)$ исходного уравнения запишется так:

$$y_m(x)=C_1x^{k_1}+C_2x^{k_2}+C_3x^{k_3}+\ldots+C_me^{k_m}.$$

2. Пусть корни $k_i$ – кратные кратности $m$. Тогда,

$$\begin{aligned}y_m(t)&=C_1x^{kt}+C_2te^{kt}+C_3t^{2}e^{kt}+\ldots+C_mt^{m-1}e^{kt}=\\&=e^{kt}\left(C_1+C_2t+C_3t^{2}+\ldots+C_mt^{m-1}\right).\end{aligned}$$

Для переменой $x$, решение примет вид при $t=\ln x$

$$y_m(t)=x^{k}\left(C_1+C_2\ln x+C_3\ln^{2}x+\ldots+C_m\ln_x^{m-1}\right).$$

3. Если корни комплексные, т.е. $k_{1,2}=\alpha+\beta_i$ кратности $m$, решение $y(t)$ запишется для корней $2m<n$ так:

$$\begin{aligned}y_{2m}(t)&=e^{\alpha t}\left(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t\right)+te^{\alpha t}\left(C_3\cos\beta t+C_4\sin\beta t\right)+\ldots+\\&+t^{m-1}e^{\alpha t}\left(C_{2m-1}\cos\beta t+C_{2m}\sin\beta t\right).\end{aligned}$$

Для переменной $x$, решение $y_{2m}(x)$ при $t=\ln x$, запишется в таком виде:

$$y(x)=x^{\alpha}\{\cos(\beta\ln x)\left[C_1+C_3\ln x+C_5\ln^2 x+\ldots+C_{2m}\ln^{m-1} x\right]+$$
$$+\sin(\beta\ln x)\left[C_2+C_4\ln x+C_6\ln^2 x+\ldots+C_m\ln^{m-1} x\right]\}.$$

**Приближенное решение дифференциальных уравнений.** В случае, когда точно проинтегрировать дифференциальное уравнение с помощью элементарных функций не удается, его решение удобно искать в виде степенного ряда, например ряда Тейлора или Маклорена.

При решении задачи Коши

$$y'=f(x,\ y),\ \ y(x_0)=y_0, \tag{12.22}$$

используется ряд Тейлора

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{12.23}$$

где $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=f(x_0,\ y_0)$, а остальные производные $y^{(n)}(x_0)$ $(n=2,$ $3,\ \ldots)$ находятся путем последовательного дифференцирования уравнения (12.22) и подстановки начальных данных в выражения для этих производных.

Решение задачи Коши $y=\varphi(x)$ для дифференциального уравнения можно также искать в виде разложения в степенной ряд

$$y=\varphi(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots \tag{12.24}$$

с неопределенными коэффициентами $a_i$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ \ldots)$.