Лекция № 1

Тема : Введение. Предмет, задачи и концептуальные понятия теории позитивных динамических систем

План:

1. Предмет, задачи и структура курса.
2. Основные понятия и определения.

§ 1. Предмет, задачи и структура курса

При описании различных технических, биологических, экономических, экологических и других объектов реального мира широко используется метод математического моделирования, позволяющий описать поведение объекта исследования, изучить его структуру, свойства, законы развития и взаимодействия с окружающим миром.

Определение наилучших способов управления и регулирования при заданных критериях и целях исследования, а также прогнозирование динамических состояний основных характеристик исследуемого объекта является определяющим при формулировке математической модели.

Многие из указанных сложных объектов обладают **свойством позитивности**, характеризующимся тем, что входные и выходные переменные моделей объекта, называемые в дальнейшем ***позитивными переменными***, остаются неотрицательными во времени.

К таким позитивным переменным можно отнести такие, как:

- время,
- деньги и товары,
- потоки данных в сетях,
- популяции людей, животных и растений,
- электрические заряды,
- уровни интенсивности света,
- вероятности в марковских моделях и др.

Моделирование и изучение сложных объектов, в частности, предполагает их описание в виде систем дифференциальных или разностных уравнений большой размерности.

Системы с положительными (или по крайней мере неотрицательными) в течение всего времени переменными состояния, описываемые указанными типами уравнений, называются ***положительными (позитивными) системами***.

Такие системы характеризуются **специфическим свойством**, заключающимся в том, что любые неотрицательные вход и начальное состояние системы генерируют неотрицательные фазовую траекторию и выход в течение всего времени.

Исследования в области позитивных систем проведены в работах А.Н.Алилуйко, Д.Г.Кореневского, М.А.Красносельского, М.Г.Крейна, П.Д.Крутько, Е.А.Лифшица, А.Г.Мазко, М.А.Рутмана, Х.Л.Смита, М.В.Хирша и др.

Построение математической модели сложной системы и ее последовательная разработка опираются на фундаментальные законы сохранения. Выбираемый закон сохранения определяет характер взаимосвязей элементов, вид и метод построения математической модели сложной системы.

Так, например, описание биологических и экономических систем, основанное на законах сохранения массы, вещества, энергии и т.д., сводится к построению материальных, тепловых, энергетических и др. балансов. В частности, при моделирования экономической системы, включающей n регионов (отраслей), материальный баланс трансформируется соответственно в межрегиональный (межотраслевой) баланс. Модели, формируемые на основе указанных балансов, известны в литературе как ***балансовые модели*** и относятся, в частности, к типу ***матричных моделей***.

С учетом вышесказанного выделение в классе позитивных систем подкласса систем балансового типа является обоснованным.

В выбранном подклассе систем, описываемых с помощью дифференциальных или разностных уравнений, можно выделить, например, следующие:

- *биологические системы*, описываемые с помощью моделей В. Вольтерра, А. Лотки, Т. Мальтуса и т.д.;
- *экономические системы*, описываемые моделями С. Карлина, В.В. Леонтьева, Дж. фон Неймана, Р. Солоу, Р. Харрода, А.А. Шананина и др.;
- *экологические системы*, моделями которых являются модели В.В. Леонтьева-А. Форда, Г.Е. Хатчинсона и др.

Исследования в области позитивных статических и динамических систем балансового типа проведены в работах Д. Гейла, В.С.Григоркива, С. Карлина, В.Ф. Кротова, Ф.У. Ланчестера, В.В. Леонтьева, И.Н.Ляшенко, Т. Мальтуса, М.В. Михалевича, Н.Н. Моисеева, Дж. фон Неймана, В.С. Немчинова, В.В. Новицкого, А.А. Петрова, И.Г. Поспелова, И.В. Сергиенко, Р. Солоу, Ю.Н. Черемных, А.И. Шананина и др.

При этом **<u>многие модели в выбранном подклассе позитивных систем балансового типа характеризуются некоторой ограниченностью</u>** в части:

- недостаточного учета динамики отдельных составляющих моделей,
- неустойчивости решений на бесконечном интервале времени,
- отсутствия возможности корректировать входные параметры моделей,

– стабилизировать неустойчивые системы,
– улучшать динамические свойства систем и др.

Ограниченность моделей позитивных систем балансового типа **устраняется** в условиях полной или неполной информации о состоянии объекта, например, путем:

– уточнения и усложнения известных моделей,
– наложения специальных ограничений на соответствующие матрицы коэффициентов в моделях, описывающих поведение сложных систем;
– перехода от разомкнутых моделей к замкнутым, позволяющим корректировать входные и выходные характеристики объекта исследования и улучшать его динамические свойства,
– определения программных управлений, которые позволяют достичь желаемого выхода системы.

В случае, когда для исследуемой сложной системы невозможно определить полный вектор состояния (однако можно измерить некоторую линейную комбинацию его переменных, по которым система является наблюдаемой), путем построения наблюдателя полного порядка представляется возможным определение оценок этого состояния.

Таким образом, исследования, проводимые в рамках данного курса являются актуальными с теоретической и практической точек зрения.

Целью курса является:

изучение новых асимптотически устойчивых (по Ляпунову) разомкнутых и замкнутых дискретных и непрерывных математических моделей позитивных динамических систем балансового типа, способных:

– уточнять существующие модели,
– улучшать динамические свойства указанных систем,
– проводить анализ особенностей поведения систем,
– осуществлять управление и регулирование объектом исследования в условиях как полной, так и неполной информации о его состоянии.

Основные задачи курса:

1. построение разомкнутой дискретной динамической математической модели позитивной системы балансового типа, описываемой системой линейных разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами;
2. получение непрерывного аналога разомкнутой дискретной динамической математической модели позитивной системы,

описываемого системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами;

3. проведение качественного анализа полученных систем разностных и дифференциальных уравнений с целью выявления динамических свойств построенных математических моделей и выделения условий, обеспечивающих позитивность и асимптотическую устойчивость построенных моделей;
4. построение замкнутой дискретной динамической математической модели позитивной системы балансового типа, описываемой системой линейных разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами с целью коррекции входных параметров моделей и управления выходными параметрами модели;
5. получение непрерывного аналога замкнутой дискретной динамической математической модели, описываемого системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами с целью непрерывных во времени коррекции входных параметров модели и управления выходными параметрами модели;
6. проведение качественного анализа полученных систем разностных и дифференциальных уравнений замкнутых дискретной и непрерывной моделей с целью выявления динамических свойств этих моделей.

Объектом исследования являются позитивные динамические системы балансового типа.

Предметом исследования являются:

- свойства, обеспечивающие позитивность и асимптотическую устойчивость динамических систем балансового типа,
- моделирование,
- анализ,
- управление,
- регулирование указанных позитивных систем.

§ 2. Основные понятия и определения

Приведем основные понятия и определения.

Линейная система, функционирование которой описывается оператором A, **позитивна**, если каждому положительному входу X (то есть входу из некоторого конуса K) отвечает положительный выход $X = AU$ (то есть выход из того же конуса K или некоторого другого конуса K_1).

Причем если X и U не зависят от времени, то позитивная система является **статической** и, таким образом, позволяющая определять допустимые и рациональные состояния сложной системы.

Пусть $\mathcal{E}$ – банахово пространство, полуупорядоченное конусом K и $X(t) \in \mathcal{E}$ – состояние динамической системы с непрерывным или дискретным временем $t \geq 0$.

Выпуклое замкнутое множество K вещественного нормированного пространства $\mathcal{E}$ называется **конусом**, если $K \cap -K = \{0\}$ и $\alpha X + \beta Y \in K$ для любых $X, Y \in K$ и $\alpha, \beta \geq 0$.

Система называется (t, t_0)**-позитивной**, если из $X(t_0) = X_0 \in K$ следует $X(t) \in K$.

Система **позитивна**, если она (t, t_0)-позитивна при любых $t > t_0 \geq 0$. Данное свойство системы равносильно положительности оператора движения системы $V(t, t_0): \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, определяющего переход из состояния X_0 в состояние $X(t) = V(t, t_0) X_0$ при $t > t_0 \geq 0$.

Понятие позитивных систем тесно связано с введенным К. Ерроу понятием ***М*-матриц (матриц Метцлера)**, то есть матриц, в которых внедиагональные элементы являются неотрицательными, а на диагональные элементы ограничения не накладываются: $a_{ij} \geq 0 \ \left(i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}\right)$.

Класс *М-матриц* включает подкласс неотрицательных и положительных матриц, которые используются в данном курсе.

Матрицу A с действительными элементами

$$A = \left(a_{ij}\right) \qquad \left(i, j = \overline{1, n}\right)$$

назовем ***неотрицательной*** (обозначение: $A \geq 0$) или ***положительной*** (обозначение: $A > 0$), если все элементы матрицы A неотрицательные (соответственно положительные): $a_{ij} \geq 0$ (соответственно $a_{ij} > 0$).

М-матрицы обладают следующими **основными свойствами**, которые доказываются соответственно теоремами Д.Фробениуса и О.Перрона:

1) квадратная неотрицательная неразложимая матрица A всегда имеет одно положительное собственное значение $\lambda_M(A)$, которое является простым корнем характеристического уравнения $\det(\lambda I - A) = 0$ таким, что модули всех последних собственных значений матрицы A не превышают числа $\lambda_M(A)$;

2) положительная квадратная матрица A всегда имеет действительное и положительное собственное значение $\lambda_M(A)$, которое является простым корнем характеристического полинома матрицы и

превышает по величине модули всех последних собственных значений.

Если коэффициенты **линейной дифференциальной системы**

$$\dot{X} = AX \tag{1.1}$$

образуют M-матрицу, то она является асимптотически устойчивой.
M-матрица задается условиями:

$$a_{ij} \geq 0, \quad i \neq j, \tag{1.2}$$

$$-A^{-1} = B, \quad b_{ij} \geq 0, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{1.3}$$

Причем условие (1.2) эквивалентно позитивности системы (1.1) относительно конуса неотрицательных векторов.

Для позитивной системы (1.1) условие (1.3) позитивной обратимости матрицы A эквивалентно позитивности всех последовательных главных миноров матрицы A.

Аналогично, **для разностных систем**

$$X_{t+1} = AX_t. \tag{1.4}$$

Если в системе (1.4) матрица A является неотрицательной и имеет обратную матрицу $(I - A)^{-1} \geq 0$, где I – единичная матрица, то система (1.4) является асимптотически устойчивой.

Условие $A \geq 0$ эквивалентно условию позитивности системы (1.4) относительно конуса неотрицательных векторов.