Лекция № 2

Тема : Математические модели динамики позитивных систем балансового типа

В данном курсе будем иметь дело со сложными системами.

Сложные системы – системы с большим количеством взаимоувязанных и взаимодействующих между собой элементов (подсистем), которые обеспечивают выполнение системой некоторой достаточно сложной функции.

Следовательно, сложность системы определяется количеством элементов (подсистем) и связей между ними.

Поскольку экономической системе, которая является частичным случаем позитивной динамической системы балансового типа, присущи все признаки сложной системы (она объединяет большое количество элементов и отличается разнообразием внутренних связей и взаимосвязей с другими системами), то вполне возможным является перенесение свойств, присущих экономической системе, на системы другой природы (биологические, экологические, технические и другие).

Будем считать, что все подсистемы (производства или отрасли) сложной экономической системы являются взаимосвязанными в модели. Схема взаимосвязей n подсистем сложной экономической системы представляется на рис. 2.1, на котором $1,2,3,\ldots,n$ граф описывает соответственно взаимосвязи в $1,2,3,\ldots,n$ подсистеме. Стрелками указывается, с какой j-й $\left(j=\overline{1,n}\right)$ подсистемой взаимосвязана i – я $\left(i=\overline{1,n}\right)$ подсистема.

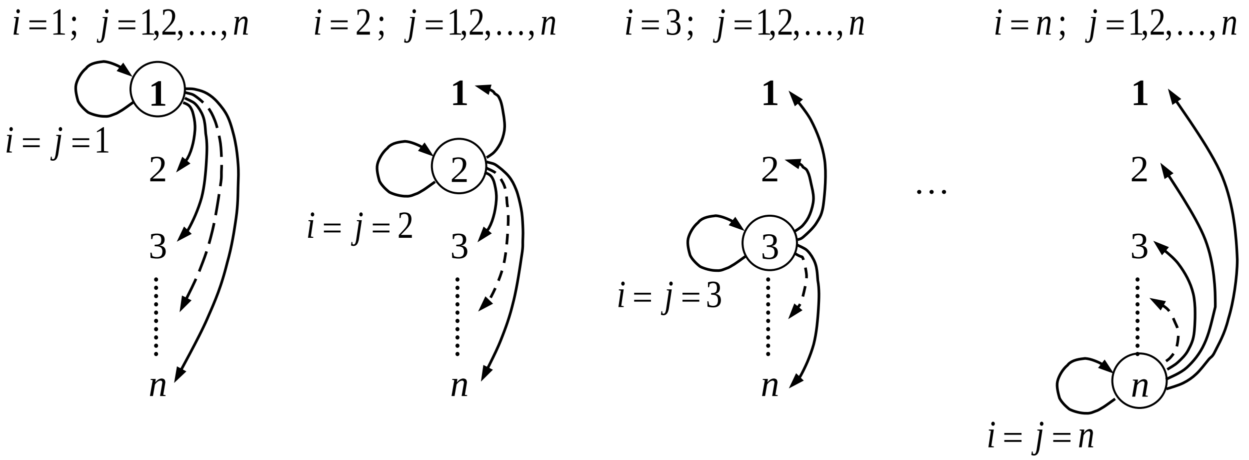

Рис. 2.1 Взаимосвязи между n подсистемами сложной системы

Таким образом, согласно рис. 2.1, все подсистемы сложной экономической системы взаимосвязаны между собой. Общее число взаимосвязей определяется числом n^2.

§ 1. Анализ существующих подходов к описанию сложной экономической системы

Проведем анализ некоторых существующих подходов к описанию сложной экономической системы, включающей n взаимосвязанных производств (отраслей или подсистем экономической системы).

Предварительно условимся относительно некоторых обозначений. Будем писать

$$A \geq B \text{ или } B \leq A,$$

где A, B – вещественные квадратные матрицы одинаковых размеров $n \times n$

$$A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \quad \left(i, j = \overline{1, n}\right),$$

тогда и только тогда, когда $a_{ij} \geq b_{ij}$ $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$.

Если элементы $a_{ij} > b_{ij}$ $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$, то будем писать $A > B$ или $B < A$.

Для описания поведения сложной экономической системы применяются модели статического и динамического межотраслевого баланса, основанные на гипотезе о балансовых соотношениях в исследуемой системе и базирующиеся на следующих предположениях:

1) отрасли экономической системы считаются чистыми. Это означает, что каждая отрасль выпускает продукцию только одного типа;

2) технология производства считается неизменной в течение некоторого промежутка времени $[t_0, T]$, где $T > t_0$;

3) имеет место прямо пропорциональная зависимость между потоками продукции X_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ из одной отрасли в другую и объемами продукции X_j $\left(j = \overline{1, n}\right)$: $X_{ij} = a_{ij} X_j$ $\left(j = \overline{1, n}\right)$, где a_{ij} – постоянные коэффициенты, характеризующие структуру затрат.

§ 1.1 Статическая модель межотраслевого баланса В.В. Леонтьева

Известная статическая модель межотраслевого баланса В.В. Леонтьева, основывающаяся на указанных предположениях и представляемая в виде

$$X = AX + Y, \tag{2.1}$$

описывает состояния экономической системы, отнесенные к одному моменту времени.

В уравнении (2.1) обозначено: $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ – вектор-столбец валового выпуска продукции; $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ – матрица материалоемкости размерности $n \times n$; коэффициенты α_{ij} $\left(i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n}\right)$ определяют нормы затрат продукции $i-$й отрасли на воспроизводство единицы продукции $j-$й отрасли; $Y=(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)^T$ – вектор-столбец конечной продукции.

В статической модели В.В. Леонтьева (2.1) матрица A коэффициентов a_{ij} прямых материальных затрат удовлетворяет следующим свойствам:

1) коэффициенты $a_{ij}\geq 0$, а следовательно, матрица $A\geq 0$.

2) диагональные элементы матрицы A меньше единицы: $a_{ii}<1$, $(i=\overline{1,n})$. Данное свойство при рассмотрении экономической системы объясняется тем, что процесс воспроизводства невозможно осуществить, если для собственного воспроизводства в $i-$й отрасли расходуется объем продукта, больший создаваемого.

В силу того, что система уравнений межотраслевого баланса (2.1) является отражением реальных экономических процессов, в которых содержательный смысл могут иметь лишь неотрицательные значения векторов состояния (из некоторого конуса K), матрица A должна быть продуктивной .

Неотрицательную матрицу A будем называть *продуктивной*, если существует такой неотрицательный вектор X, что

$$X-AX\geq 0. \tag{2.2}$$

Запись $X-AX\geq 0$ означает, что элементы

$$X_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j\geq 0 \quad (i=\overline{1,n}).$$

Модель с продуктивной матрицей A назовем *продуктивной*.

Условие (2.2) означает существование неотрицательного вектора конечной продукции $(Y\geq 0)$ для модели межотраслевого баланса, описываемой системой (2.1).

Матрица A является продуктивной, если выполняется одно из следующих эквивалентных необходимых и достаточных условий:

1) матрица $(I-A)$ является неотрицательно обратной, то есть существует обратная матрица $(I-A)^{-1}\geq 0$, где $I-$ единичная матрица размерности $n\times n$;

2) матричный ряд $I+A+A^2+A^3+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ сходится к обратной матрице $(I-A)^{-1}$;

3) наибольшее по модулю собственное значение $\rho(A)$ характеристического уравнения $|A-\rho I|=0$ (так называемый *спектральный радиус матрицы* A) строго меньший единицы: $\rho(A)<1$;

4) последовательные главные миноры порядка от 1 до n матрицы $(I-A)$ положительны.

Достаточным критерием продуктивности матрицы A в модели (2.1) является частный случай условия Брауэра-Солоу, формулирующийся в терминах сумм коэффициентов матрицы A: для продуктивности матрицы A достаточно выполнение одного из утверждений:

$$1)\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1, \quad i = \overline{1,n}; \tag{2.3}$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.4}$$

Статическая математическая модель (2.1) вносит определенные упрощения в описание экономической системы и сужает возможности ее анализа. К числу таких упрощений относится то, что в рамках данной модели не устанавливается связь с предшествующими или последующими периодами, а также не анализируются распределение, использование и производственная эффективность капитальных вложений.

§ 1.2 Динамические модели функционирования экономической системы

На основе статической модели (2.1) построены динамическая модель межотраслевого баланса В.В. Леонтьева и динамическая модель экономической системы С. Карлина, которые в отличие от статической модели (2.1) отражают процесс развития экономики, выделяют производственные капитальные вложения из состава конечной продукции, исследуют их структуру и влияние на рост объемов производства, а также устанавливают непосредственную взаимосвязь между предыдущими и последующими этапами развития, что тем самым позволяет приблизить анализ на основе экономико-математической модели к реальным условиям развития экономической системы.

Проведем анализ указанных динамических моделей сложной экономической системы.

Динамическая модель В.В. Леонтьева, описываемая системой разностных уравнений

$$X_t = AX_t + B(X_{t+1} - X_t) + C_t, \tag{2.5}$$

учитывает динамику инвестиций, описываемую слагаемым $B(X_{t+1} - X_t)$, но при этом не учитывает динамику производства (в левой части системы (2.5) отсутствует слагаемое X_{t+1}), в то время как в **модели С. Карлина**, описываемой системой

$$X_{t+1} = AX_t + C_t, \tag{2.6}$$

учитывается динамика производства (слагаемое X_{t+1} в левой части системы (2.6)), но при этом не учитывается динамика инвестиций, как в модели В.В. Леонтьева (2.5).

В уравнениях (2.5) и (2.6) обозначено: X_t, X_{t+1} – векторы размерностей $n \times 1$ валовых выпусков продукции соответственно в моменты времени t и $t+1$; $B = (\beta_{ij})_{n \times n}$ – матрица капиталоемкости размерности $n \times n$; коэффициенты β_{ij} $(i = \overline{1,n}\,,\ j = \overline{1,n})$, определяют нормы затрат капитальных вложений i – й отрасли на прирост единицы валовой продукции j – й отрасли; C_t – вектор размерности $n \times 1$ непроизводственного потребления, являющийся либо заданным, либо функционально установленным.

В моделях (2.5) и (2.6) действуют традиционные условия неотрицательности и продуктивности матрицы материалоемкости $A = \{\alpha_{ij}\}$, принятые В.В. Леонтьевым в статической модели межотраслевого баланса (2.1) и обеспечивающие позитивность систем (2.5) и (2.6).

Исходя из проведенного анализа моделей (2.5) и (2.6), можно сделать вывод, что указанные модели являются ограниченными в части недостаточного учета динамики отдельных составляющих. Такая ограниченность моделей устраняется путем уточнения и усложнения моделей.