Компьютерная алгебра

(Курс лекций)

Лекция 8

Преобразования представлений математических объектов

Содержание:

1. Характеристика задач преобразования представлений(ПП);
2. Средства ПП.
3. **Цели преобразования представлений**

*Текущее представление математического объекта:*

1. Предметная интерпретация символьных представлений;
2. Кодирование представления с помощью структур данных:

-Булева функция принадлежности элемента множеству;

-Булева решетка;

-Булева арифметика;

-Булева алгебра.

**Характеристика задач ПП.**

*Условия ПП:*

1. Позитивные(Успешный опыт предыдущих преобразований, ясность цели преобразования, существование средств выполнения преобразования);
2. Негативные(Достижение границ возможных преобразований, не совпадение постановок задач для текущего и «разрешимого» представлений, необходимость многоцелевых взаимно противоречивых изменений представления).

*Показатели качества преобразований:*

1. Свойства выполненных преобразований:

-Завершенность;

-Эффективность;

-Общность;

-Информативность.

 2. Свойства преобразованных представлений.

Семантика понятия "представление"

Термин "представление" может иметь 3 различных смысла:

1. Совокупность правил для создания некоторого лингвистического объекта;
2. Процесс;
3. Результат применения указанных правил.

**Сущность преобразования представлений**

Свойства представлений, определяющие качество их преобразований,

напрямую зависят от выбора целей преобразований.

**Если цель–это познание**, то сущностью преобразований

является смысловая схематизация представления,

т.е. все «правильные» зависимости должны быть структурированы,

а остальные становятся параметрами представления.

**Если цель–это вычисление**, то ключевую роль

при выборе характера преобразования представления

приобретает тип текущего этапа вычисления:

(1) ввод данных в систему компьютерной алгебры,

(2) подготовка данных к выполнению операции

над математическими объектами,

(3) вывод результатов вычислений для пользователя и т.п.

**Требования к свойствам представлений:**

-Каноничность;

-Нормальность:

-Естественность;

-Экономичность.

**Средства преобразования ПП**

　**Замечание 1.** Все преобразования представлений математических объектов производятся на символьном уровне абстракции, т.е. над алгебраическими выражениями.

 **Замечание2.** Средством обеспечения выполнимости преобразований является существование некоторого отношения эквивалентности между представлениями.

 **Замечание3.** Преобразования представлений, не сохраняющие алгебраических свойств математических объектов (т.е. различного рода аппроксимации) не рассматриваются.

 **Замечание4.** Все лингвистические объекты, порождающие преобразуемые представления, ограничены языками теорий первого порядка.

　**Типы средств эквивалентных ПП**

􀂃Правила допустимых подстановок термов символьных строк;

􀂃Тождества законов композиции элементов алгебраических систем;

􀂃Правила вывода в формальных теориях(исчислениях);

􀂃Диаграммы морфизмов категорий математических объектов.

**Формальные теории(исчисления)**

**Формальная теория**(исчисление) –это кортеж следующих множеств:

1)множество A символов, образующих алфавит;

2)множество F слов в алфавите A, F ⊂A, которые называются формулами;

3) подмножество B формул, B ⊂F, которые называются аксиомами;

4) множество отношений R на множестве формул, которые называются правилами вывода.

Множество символов A может быть конечным или бесконечным.

Обычно для образования символов используют конечное множество букв.

Множество формул F обычно задается индуктивным определением.

Множества A и F в совокупности определяют язык(сигнатуру) формальной теории.

Множество аксиом B может быть конечным или бесконечным.

Если оно бесконечно, то, как правило, задаётся с помощью конечного множества схем аксиом

и правил порождения конкретных аксиом из схемы аксиом.

Множество правил вывода R, как правило, конечно.

**Выводом в исчислении** ψ= (A, F, B, R) называется последовательность формул F 1, F 2,… F n такая, что для любого k (1 ≤k ≤n) формула F k есть либо аксиома исчисления ψ, либо непосредственное следствие каких-либо предыдущих формул.

Формула G называется теоремой исчисления ψ(выводимой в ψ или доказуемой в ψ), если существует вывод F1, F2,… Fn, G который называется выводом формулы G или доказательством теоремы G. Записывается это следующим образом: F 1, F 2,… F n├G

Исчисление ψ называется не противоречивым, если не все его формулы доказуемы.

Исчисление ψ называется полным, если каждому истинному высказыванию М соответствует теорема теории ψ.

Формальная теория ψ называется разрешимой, если существует алгоритм, который для любой формулы теории определяет, является ли эта формула теоремой теории ψ или нет.

**Классификация логик**

　**Логика первого порядка**–это исчисление,

в котором **кванторы общности**∀ и ∃ всегда действуют только на множестве предметных переменных.

Логика второго порядка позволяет действовать одному из кванторов на подмножествах (необязательно конечных) множества предметных переменных и нафункциональныхсимволах.

Слабая логика второго порядка позволяет действие кванторов на конечных подмножествах множества предметных переменных и на множестве натуральных чисел.

Логика третьего порядка позволяет действовать кванторам на множествах функциональных символов и т.д.

Логика первого порядка, которая позволяет аксиоматизировать теорию множеств, называется **классической**.

Причиной появления не классических логик является наличие большого количества проблем, для моделирования и решения которых не достаточно формализма классической логики.

Все **не классические** логики принято делить на два класса:

(1) расширения классической логики;

(2) альтернативы классической логики.

Класс(1) объединяет модальную логику и её разновидности:

темпоральную, динамическую и другие логики.

Класс(2) объединяет многозначную, частичную, нечёткую и интуиционистскую логики.

　**Частичная логика** имеет три значения истинности: ложь(0), истина(1) и неопределённость(1/2).

Вычисления значений формул в n-значной логике

выполняются с помощью таблиц истинности.

**Равенство–особая форма представления**

*Системы равенств позволяют выражать*

*следующие свойства математических объектов:*

􀂃Отношение между объектами.

􀂃Определение объекта.

􀂃Вычисление объекта.

**Равенством** называется формула следующего вида s = t,

где s и t–термы, т.е. s, t ∈T ( X , Ω).

**Присваиванием** называется гомоморфизм V: T ( X , Ω) →A,

где A –некоторая фиксированная Ω-алгебра.

При этом V( t ) называется **значением терма** t относительно присваивания V.

Термы t и t’ называются **функционально эквивалентными**, если V ( t ) = V( t’).

Пусть E ⊆T ( X , Ω) x T ( X , Ω).

**Определение.** Если А является Ω-алгеброй, то равенство s = t истинно в A, если для всех присваиваний V в A выполнено V (s )= V ( t ).

Множество всех таких Ω-алгебр A, в которых истинны все равенства a = b, где( a , b ) ∈E, называется многообразием Var( Ω, E ) множества E.

E |= s = t⇔s = t истинно во всех Ω-алгебрахиз Var( Ω, E ).

**Определение.** ОтношениеE |–s = t истинно, если равенство s = t

может быть выведено за конечное число шагов висчислении равенств.

Исчисление равенств является правильными полным относительно семантического равенства( |=), вследствие следующей теоремы:

**Теорема(Гаррет Биркгоф, 1935).** E |= s = t⇔E |–s = t

В силу этой теоремы отношение семантического равенства

является рекурсивно перечислимым, если E–рекурсивно-перечислимое множество.