**Лекция10**

Каноническое упрощение полиномиальных уравнений

**Содержание лекции:**

* Задача полиномиального упрощения
* Редукция полиномов
* Базисы Грёбнера
* Решение системы полиномиальных уравнений
* Алгоритм Бухбергера

**План лекции: тема подраздела**

* ***Задача полиномиального упрощения***
* Редукция полиномов
* Базисы Грёбнера
* Решение системы полиномиальных уравнений
* Алгоритм Бухбергера

**Задача полиномиального упрощения**

 Сущность полиномиального упрощения

Сущностью полиномиального упрощенияявляется построение решения системполиномиальных уравнений.(Вобщемслучае, рассматриваются полиномы отнескольких переменных).Системы полиномиальных уравнений являются соотношениями, которым должны удовлетворять различные изменения состояний динамических объектов.

*Пример*.Положение механической структуры,образованной двумя сегментами длин 1 и 2 соответственно,соединёнными в одной точке, определяется девятью переменными (три точки по три координаты каждая) спомощью системы из двух уравнений:

(x 1–x 2)2+ ( y 1–y 2) 2+ ( z 1–z 2) 2= 1

(x 1–x 3)2+ ( y 1–y 3) 2+ ( z 1–z 3) 2= 4

*Замечание*. Выбранное для объекта представление не является единственным .

 Подзадачи полиномиального упрощения

Таким образом, обобщённо, задача полиномиального упрощения

состоит из трёх в заимосвязанных подзадач:

(1) Выбор исходного представления для системы полиномиальных уравнений.

(2) Построение системы(элементарных) преобразований

одного(более сложного) представления для получения другого(более простого) представления.(3) Выбор из построенной системы преобразований списка соотношений, выполняющих направленные(т.е. упорядоченные определённым образом), преобразования исходного представления к упрощённому(внекотором смысле) представлению ,причём гарантирующие(с помощью конструктивных процедур проверки)эквивалентность таких преобразований.

Полиномиальный идеал

Известно, что идеалом в полугруппе называется множество ,замкнутое относительно полугрупповой операции(обычно называемой умножением),причём умножение на любой его элемент приводит к элементу этого множества .Семейством образующих идеала называется множество элементов ,умножением на которые элементов полугруппы можно получить все элементы идеала.Конкретизируя выше указанные определения на случай кольца полиномов, имеем:

*Определение*. Идеалом, порождённым семейством образующих,называется множество линейных комбинаций этих образующих с полиномиальными коэффициентами.

*Определение*. Полиномы f и g называются эквивалентными относительно идеала I, если( f –g ) ∈ I .

Уточнённая постановка задачи

 Если мы рассматриваем образующие идеала как полиномы ,которые мы приравниваем К нулю, то последнее из вышеприведённых определений утверждает ,что рассматриваемые полиномы не различаются .Поэтому для получения решения задачи полиномиального упрощения требуется исследовать следующие вопросы:

(1) Как определить идеал?

(2) Как выяснить, эквивалентны ли два полинома относительного данного идеала?

**План лекции: тема подраздела**

* Задача полиномиального упрощения
* ***Редукция полиномов***
* Базисы Грёбнера
* Решение системы полиномиальных уравнений
* Алгоритм Бухбергера

Редукция полиномов

Простота системы образующих идеала–1 .Очевидно, что у одного и того же идеала

существует несколько систем образующих.(Всегда можно добавить любую линейную комбинацию образующих или удалить одну из них ,если она является линейной комбинацией остальных). Важный вопрос: существует ли простая система образующих? Для правильного ответа требуется уточнить, что означает«простая».

Покажем, что простота зависит от типа отношения порядка на мономах ,определённого для полиномов .Простота системы образующих идеала–2 . Рассмотрим полиномы от переменных x 1, x 2, …, x n, коэффициенты которых принадлежат некоторому полю F(иными словами, такие коэффициенты можно складывать, вычитать, умножать и делить). Введём на множестве мономов некоторое отношение порядка ,обозначаемое символом <и удовлетворяющее двум следующим условиям:

(1) Для любых мономов a , b ,c из соотношения a < b , следуетa c < b c .

(2) Для любых мономов a , b , если b ≠1 , то a < a b .

Легко проверить, что выше приведённым условиям удовлетворяют три отношения порядка:

(1) лексикографический;

(2) общей степени, затем лексикографический;

(3) общей степени, затем обратный лексикографический.

Понятие «редукция полинома»–1

Любой ненулевой полином можно представить в порядке убывания( заданном отношением <) своих мономов. a 1X 1+ a 2X 2+ …+ a i X i + …+ a n Xn для любого ia i≠0 и X i+1< X i .При такой записи X 1называется старшим мономом, a 1X 1–старшим членом полинома. Пусть G–конечное множество полиномов(система образующих полиномиального идеала)и < –фиксированный порядок, удовлетворяющий сформулированным выше условиям.

*Определение1*.Полином f редуцирован относительно G,

Если ни один старший моном элемента множества G не делит старшего монома полинома f . Иными словами, старший моном никакой из линейных комбинаций следующего вида: f –h g ig i∈G , h –произвольный полином полинома f и элемента множества G не меньше( относительно порядка <)Старшего монома полинома f.

 Понятие «редукция полинома»–2

Таким образом, утверждение«полином f редуцирован относительно G»Эквивалентно тому, что«степень»полинома f не может быть понижена . Вычитанием из него произведения h g i, гдеg i ∈ G ,h –произвольный полином.Если полином f не редуцирован относительно G, То из него можно вычесть кратное некоторого элемента множества G(а именно: h g i, гдеg i∈G ,h –произвольный полином),

(чтобы исключить его старший моном) так, что в результате получится новый полином: f 1= f –h g i старший моном которого меньше, чем старший моном полинома f. Переход от f к f 1называется редукцией f относительно G.

Полиномы f и f 1эквивалентны относительно идеала, порождённого множеством G.

Пример редукции полинома

*Пример*.

Пусть

G = { g 1= x –1 , g 2= y –2 }

f = x y

Тогда имеются две возможные редукции полинома f относительно G:

(1) Редукция с помощью g 1, в результате применения которой получим:

 f –y g 1= x y –y ( x –1 ) = x y –y x + y = + y

(2)Редукция с помощью g 1, в результате применения которой получим:

 f –x g 2= x y –x ( y –2 ) = x y –x y + 2 x = + 2 x

Цепочки редукций полинома

Последовательные редукции образуют цепочку редукций для f относительно G.

Как видно из выше приведённого примера такая цепочка, Вообще говоря, не является единственной .Очевидно, что полином f не может иметь бесконечной цепочки редукций ,поэтому всякая цепочка редукций в конце концов Приводит к редуцированному полиному. Очевидно, что для каждого не редуцированного полинома существует конечная цепочка редукций, приводящего его к редуцированному полиному.

 «Запасной»метод редукции полинома

Ранее введённое определение редуцированного полинома:

(1) включает в себя понятие старшего монома полинома f,

(2) требует, чтобы ни у какой линейной комбинации f 1= f –h g i

Старший моном не был меньше, чем f.

Однако возможны следующие случаи:

(1) Если полином f ранее был редуцирован, то(по определению) полинома f 1несуществует,т.е. с помощью G нельзя исключить из f старший моном.

(2) В полиноме f существуют другие(не старшие) мономы,

Которые могут быть исключены ,чтобы сделать линейную комбинацию«меньшей».

Применение«запасного»метода редукции

*Пример.* Пусть переменные x и y подчинены лексикографическому порядку y < x

G = { g 1= y –1 }

Тогда полином f = x + y 2+ y редуцирован относительно G

( его старший моном равен x ).

Вместе с тем из полинома f можно исключить мономы y 2 и y относительно G.

Действительно, умножая g 1= y –1на y и вычитая полученное произведение из f,

получим:

f \*1= f –y g 1= x + 2 y

Далее, умножая g 1= y –1 на 2 и вычитая полученное произведение из f \*1,

получим:

f \*2= f \*1–2g 1= x –2

Таким образом, с помощью следующей цепочки редукций: f →f \*1→f \*2

Получим полином с«меньшей линейной комбинацией».

Вполне редуцированный полином

Полином f называется вполне редуцированным относительно G, если ни один моном полинома f Не делится ни на один старший моном элемента множества G.

*Замечание*. Свойство «вполне редуцированности» является более сильным,

чем свойство « редуцированности ».

**План лекции: тема подраздела**

* Задача полиномиального упрощения
* Редукция полиномов
* ***Базисы Грёбнера***
* Решение системы полиномиальных уравнений
* Алгоритм Бухбергера

Определение стандартного базиса

Очевидным следствием предшествующих рассуждений является тезис о том,

Что систему образующих G (называемую также базисом) идеала I

Могут составлять различные наборы элементов. Поэтому поставим задачу–

Выбор системы образующих наилучшим(в некотором смысле) образом.

*Определение* .Система образующих G идеала I называется стандартным базисом

( базисом Вольфганга Грёбнера) ( относительно порядка <),

Если в результате любой редукции элемента f идеала I

К редуцированному полиному относительно G всегда получается нуль.

*Определение*(эквивалент предыдущего).Стандартным базисом называется такое множество G образующих рассматриваемого идеала I,

Что любой полином f обладает единственной редуцированной относительно G формой.

Пример построения стандартного базиса–1

*Замечание1*.В случае наличия у идеала стандартного базиса говорят,

Что редукция относительно G обладает свойством Чёрча–Россера.

*Замечание2*.Стандартные базисы идеала, как правило,

Дают нам гораздо больше информации об этом идеале, чем любые другие базисы.

*Пример*. Рассмотрим идеал I, порождённый тремя полиномами:

g 1= x 3y z –x z 2

g 2= x y 2z –x y z

g 3= x 2y 2–z

Дополнительно заметим, что для кольца полиномов(т.е. для исходной постановки задачи полиномиального упрощения) множество, на котором обращаются в нуль все полиномы идеала, определяется порождающими полиномами.

Очевидно, что при x = y = z = 0 все три полинома обращаются в нуль.

Но не очевидно: есть ли другие решения?

Пример построения стандартного базиса–2

Стандартный базис идеала I ( относительно лексикографического упорядочения z < y < x ) образуют следующие полиномы:

g 2= x y 2z –x y z

g 3= x 2y 2–z

g 4 = x 2y z –z 2

g 5 = y z 2–z 2

g 6 = x 2z –z 3

Заметим, что полиномы g 2 и g 3 уже были определены ранее, а полиномы g 4 , g 5 и g 6 были добавлены.

Мы не будем доказывать стандартность построенного базиса,

Но заметим, что число элементов стандартного базиса

Может быть больше числа элементов исходного базиса.

Пример построения стандартного базиса–3

Ввиду следующих представлений(полученных с помощью факторизации):

g 2= x y z (y –1 )

g 3= x 2y 2–z

g 4 = z ( x 2y –z )

g 5 = z 2( y –1 )

g 6 = z 2( x 2 –z )

ясно, чтоg 1 = x z( x 2y –z ) = zg 4

С другой стороны, одновременное обращение в нуль полиномов стандартного базиса

(т.е. g 2= 0 , g 3 = 0 , g 4 = 0 , g 5 = 0 , g 6 = 0 ) возможно в двух случаях:

(1) либо z = 0 ,и тогда должно быть x y = 0( т.к. полиномы редуцируются к x 2 y2 и поэтому x = 0 или y = 0)

(2) либо z ≠0 , и тогда должно быть y = 1 иx 2–z = 0( т.к. полиномы редуцируются к y = 1 иx 2= z)

Пример построения стандартного базиса–4

Итак, множество нулей следующей системы:

{ g 2= 0 , g 3 = 0 , g 4 = 0 , g 5 = 0 , g 6 = 0}

Имеет вид:

{ ( x , y , z ) | ( x y = 0 ∧z = 0) ∨(x 2–z = 0 ∧y = 1) }

Иными словами, этом ножество состоит из:

(1) двух прямых x = 0 и y = 0 в плоскости( x , y )

и

(2) одной параболы z = x 2 в плоскости y = 1 ,

Параллельной координатной плоскости( x ,z )

Теоремы о стандартных базисах–1

*Теорема1*. Любой идеал обладает стандартным базисом(относительно любого порядка,

Удовлетворяющего сформулированным выше условиям).

*Определение* .Редуцированным базисом называется базис, каждый полином которого вполне редуцирован относительно всех остальных.

Это ограничение необходимо, чтобы исключить тривиальности следующего типа:

Два базиса{x –1 , ( x –1 ) 2}и{x –1} различаются лишь тем,

Что первый из них не редуцирован(после редукции он превращается во второй).

*Теорема2*.Два идеала равны тогда и только тогда,

Когда они имеют один и тот же редуцированный стандартный базис (относительно одного и того жепорядка).

Теоремы о стандартных базисах–2

*Замечание*. *Теорема2* даёт каноническое представление идеалов(как только мы фиксируем порядок)

*Теорема3*.Система полиномиальных уравнений не совместна(т.е. не может быть удовлетворена, даже если допустить алгебраические расширения–например, над полем комплексных чисел C) тогда и только тогда ,когда соответствующий стандартный базис(относительно любого порядка ,Удовлетворяющего сформулированным выше условиям)содержит константу.

**План лекции: тема подраздела**

* Задача полиномиального упрощения
* Редукция полиномов
* Базисы Грёбнера
* ***Решение системы полиномиальных уравнений***
* Алгоритм Бухбергера

Теорема о числе решений системы

Если необходимо знать, конечно ли число решений системы полиномиальных уравнений, полезно следующее утверждение:

*Теорема*. Система полиномиальных уравнений в поле комплексных чисел C

Имеет не более конечного числа решений,(т.е. если имеет решения, то их число конечно, однако может не иметь ни одного решения)если каждая переменная появляется изолированно(например, как z n).В одном из старших членов соответствующего стандартного базиса относительно лексикографического порядка.

Метод определения решений–1

При выполнении условий сформулированной выше теоремы мы можем определить все решения системы с помощью следующего метода.

Пусть имеющиеся переменные x 1, x 2, …, x n-1 , x n упорядочены,

т.е. x n< x n-1< …< x 2< x 1

По условию переменная x n появляется одна в старшем члене одного из полиномов,

Входящих в стандартный базис (полином является образующей базиса).

Поскольку все остальные члены старше(в смысле отношения < ), чем этот член, то они не могут содержаться в этом базисном полиноме.( Напротив ,в нём могут содержаться лишь x n в различных степенях и числовые коэффициенты).

Таким образом, у нас есть полином от x n,( при чём только один, потому что при наличии двух полиномов мы всегда можем редуцировать один из них относительно другого),который имеет только конечное число корней. Если степень рассматриваемого полинома k, то получим не более k различных корней в C.

Метод определения решений–2

Теперь определим тот полином стандартного базиса ,в котором появляется изолировано x n-1в его старшем члене.

Пусть степень переменной x n-1в старшем члене равна k. Тогда, в силу отношения упорядочения переменных, в остальных членах такого полинома

Могут содержаться лишь переменная x n-1(в степени меньшей, чем k )

и, возможно, переменная x n(т.к. мы пользуемся лексикографическим порядком).

Для каждого возможного значения переменной x n,

Имеем в общем случае не более k 1возможныхзначений переменной x n-1

(т.е. корней рассматриваемого полинома относительно x n-1),

Где k 1–степень этого полинома попеременной x n-1.

*Замечание*. Указав«не более k», предполагаем, что могут быть кратные корни

(которые уменьшают общее количество различных корней)

Метод определения решений–3

Совместно рассматривая два выше построенных базисных полинома, Получим что общее число допустимых значений пары( x n-1, x n) не больше, чем произведение k 1\* k.

*Замечание*. Возможно, что имеются другие полиномы от x n-1иx n

И что некоторые комбинации значений x n-1иx n не удовлетворяют этим полиномам

И потому должны быть отброшены, однако, наверняка, имеется только конечное число возможностей для x n-1иx n.

Продолжая аналогичные выше приведённым рассуждения о переменных x n-2 , x n 3итд. До x 1, получим все решения системы полиномов.

Гипотеза об изолированности переменной

*Замечание*. Ранее мы предполагали, что каждая переменная появляется изолированно.

Покажем(на примере), что это предположение нельзя заменить на более слабое

Предположение о том, что каждая переменная появляется в качестве старшей переменной.

Пример . Рассмотрим две переменные x и y, где x > y.

Пусть идеал порождён двумя следующими полиномами:

g 1= ( y –1 ) x + ( y –1 )иg 2= y 2–1

образующими стандартный базис(доказательство этого утверждения опускаем).

Однако очевидно, что этот базис не удовлетворяет условиям выше рассмотренной теоремы ,т.к. переменная x не появляется изолированно.

Для y имеем два возможных решения: y = 1 иy = –1 .

Если y = –1 , то«всё нормально»,т.к. вторая образующая принимает вид( –2 x –2 ) и обращается в нуль при x = –1 .

Если y = 1 , то«всё НЕ нормально», т.к. вторая образующая обращается в нуль тождественно, и в этом случае значение x не определено(т.е. может принимать произвольное значение).

Размерность множества решений–1

*Замечание*. Условия выше рассмотренной теоремы гарантируют нуль мерность множества решений системы образующих идеала.

Однако в общем случае определение искомой размерности–не простая задача.

Для выше рассмотренной теоремы имеется очевидное обратное утверждение:

Утверждение . Идеал имеет размерность, отличную от нуля, тогда и только тогда, когда имеется переменная, которая не появляется как единственная(изолированная) переменная ни в одном из старших членов стандартного базиса (относительно лексикографическогопорядка).

Естественно предположить, что число таких переменных определяет размерность идеала (равна1, если существует кривая, на которой обращаются в нуль все полиномы)

(равна2, если речь идёт о поверхности и т.д.).

Но эта гипотеза не верна. Покажем это(на примере).

Размерность множества решений–2

*Пример*. Пусть имеем два следующих идеала:

I 1= { x 2–1 , ( x –1 ) y , ( x + 1 ) z }

I 2= { x 2–1 , ( x –1 ) y , ( x –1 ) z }

Их стандартные базисы относительно лексикографического порядка z < y < x суть

I 1= { x 2–1 , ( x –1 ) y , ( x + 1 ) z , y z }

I 2= { x 2–1 , ( x –1 ) y , ( x –1 ) z }

В обоих переменная x появляется изолированно,

Но ни переменная y , ни переменная z изолированно не появляются. Однако размерность идеала I 1равна1, т.к. его решения суть две прямые x = 1 , z = 0 и x = -1 , y = 0 . В тоже время размерность идеала I 2равна2, т.к. его решения–это плоскость x = 1 и изолированная точка x = -1 , y = z = 0 .

Размерность множества решений–3

*Замечание1*.Размерность идеала не превосходит1, если для любой пары переменных найдётся элемент базиса Грёбнера, старший моном которого содержит только эти переменные.

*Замечание2*.В общем случае размерность идеала не превосходит k, если для любых(k+1 ) переменных найдётся элемент базиса Грёбнера, старший моном которого зависит только от этих переменных.

*Замечание3*.Более тонкой характеристикой размерности алгебраического многообразия является его функция(или полином) Гильберта, степень которого совпадает с размерностью многообразия. Существуют алгоритмы, вычисляющие полином Гильберта по известному базису Грёбнера.

**План лекции: тема подраздела**

* Задача полиномиального упрощения
* Редукция полиномов
* Базисы Грёбнера
* Решение системы полиномиальных уравнений
* ***Алгоритм Бухбергера***

Алгоритм Бухбергера

Постановка задачи

По условиям одной из ранее сформулированных теорем, любой идеал обладает стандартным базисом.

Возникают два вопроса:

(1) Как вычислить стандартный базис идеала?

(2) Как проверить, является ли построенный базис идеала стандартным?

Решение обеих задач можно получить с помощью алгоритма, предложенного Бруно Бухбергером.

*Замечание.* Далее полагаем, что мы выбрали раз и навсегда порядок мономов,

Удовлетворяющий ранее сформулированным условиям .

Определение S –полинома

Определение . Пусть f и g–два не нулевых полинома со старшими членами f p и g p,

H –их наименьшее общее кратное(НОК).

Тогда S –полином полиномов f и g определяется следующей формулой:

S ( f , g ) = ( h f ) / f p–( h g )/ g p

Под НОК двух членов или мономов понимается произведение всех переменных,

Каждая в степени, равной максимуму её степеней в этих мономах.

Замечание. При вычислении НОК старших членов нужно перемножать не только степени переменных, но и коэффициенты.

Замечание. Определение S–полинома выбирается таким образом,

Чтобы старшие члены уменьшаемого и вычитаемого взаимно уничтожились.

Свойства S –полинома

(1)S –полином–это линейная комбинация полиномов f и g С полиномиальными коэффициентами( т.к. h / f p и h / g p суть мономы).

S –полином принадлежит любому идеалу, в число порождающих элементов которого входят f и g.

(2)Старшие члены полиномов( h f ) / f p и( h g )/ g p равны,

( они равны старшему члену полинома h)

И потому в формуле S –полинома они взаимно сокращаются.

(3)Справедливы очевидные соотношения:

S ( f , f ) = 0

S ( f , g ) = –S (g , f )

Критерий стандартности базиса

Теорема .Базис G является стандартным тогда и только тогда, когда для любой пары полиномов f и g из множества G их S –полином S ( f , g ) редуцируется к нулю относительно G .

Замечание. Приведённая выше теорема не только позволяет проверить, Является ли базис стандартным, но и определяет путь к построению стандартного базиса.

Чтобы проверить стандартность базиса, достаточно вычислить все S–полиномы и проверить, что все они редуцируются к нулю. Вычисление стандартного базиса

Теперь поясним идею метода вычисления стандартного базиса(на основе нестандартного) Если имеем не стандартный базис, то это в точности означает,

Что одиниз S–полиномов(пусть это будет S ( f , g ) ) не редуцируется к нулю.

Т.к. его редукция является линейной комбинацией элементов множества G, можно добавить её к G, не изменив при этом порождаемый идеал. После этого добавленияS ( f , g )редуцируется к нулю, но появляются новые S–полиномы, которые также нужно рассматривать. Важно, что этот процесс конечен(это факт, доказанный Бухбергером)

И даёт стандартный базис идеала.

Замечание. Идея метода построения стандартного базиса та же, что и в методе пополнения, рассмотренном в предыдущей лекции.

Пример построения стандартного базиса–1

Пример. Пусть G = { g 1, g 2, g 3} , z < y < x ,

g 1= x 3y z –x z 2

g 2= x y 2z –x y z

g 3= x 2y 2–z

Нужно рассмотреть следующие S –полиномы:

S ( g 1, g 2) , S ( g 1, g 3) , S ( g 2, g 3)

Старшие члены полиномов g 2иg 3сутьx y 2zиx 2y 2. Их НОК равен x 2y 2z .

Поэтому

S ( g 2, g 3)= x g 2–z g 3= –x 2y z + z 2

Этот полином не нулевой и редуцирован относительно G,Поэтому базис G –нестандартный.

Значит, можно добавить к G этот полином( или противоположный ему: g 4).

Пример построения стандартного базиса–2

Теперь G состоит из следующих полиномов:

g 1= x 3y z –x z 2

g 2= x y 2z –x y z

g 3= x 2y 2–z

g 4 = x 2y z –z 2

Нужно рассмотреть обновлённый состав S –полиномов:

S ( g 1, g 2) , S ( g 1, g 3) , S ( g 1 , g 4 ), S ( g 2, g 4 ), S ( g 3, g 4 )

Заметив, что g 1 = x g 4, можно выполнить упрощение( удалив g 1 ).

При этом идеал, порождённым множеством G, не изменится.

После такого упрощения для рассмотрения остаются только два S –полинома:

S ( g 2, g 4 )иS ( g 3, g 4 )

Пример построения стандартного базиса–3

Далее получим:

S ( g 2, g 4 )= x g 2–y g 4= –x 2y z + y z 2

Получившийся полином можно упростить( добавив g 4 ), что приводит к y z 2–z 2

Т.к. это не нуль, то базис не стандартный и поэтому необходимо расширить G,

Добавив новую образующую–g 5.

Теперь G состоит из следующих полиномов:

g 2= x y 2z –x y z

g 3= x 2y 2–z

g 4 = x 2y z –z 2

g 5 = y z 2–z 2

Нужно рассмотреть обновлённый составS –полиномов:

S ( g 3 , g 4 ) , S ( g 2 , g 5 ) , S ( g 3 , g 5 ), S ( g 4 , g 5 )

Пример построения стандартного базиса–4

Далее получим:

S ( g 3 , g 4 )= z g 3 –y g 4= –z 2+ y z 2

Полученный полином можно редуцировать к нулю( добавивg 5 ).

Относительно другихS –полиномов имеем:

S ( g 2 , g 5 )= z g 2 –x y g 5= –x y z 2+ x y z 2= 0

S ( g 4, g 5 )= z g 4–x 2g 5= –z 3+ x 2z 2= x 2z 2 –z 3

(заметим, что при последнем переписывании мономы упорядочиваются по убыванию<) Полином S ( g 4, g 5 )уже редуцирован относительно G ,

Поэтому G не является стандартным базисом и необходимо добавить к G этот новый полином( обозначимего g 6 ).

Пример построения стандартного базиса–5

Теперь множество G состоит из следующих полиномов:

g 2= x y 2z –x y z

g 3= x 2y 2–z

g 4 = x 2y z –z 2

g 5 = y z 2–z 2

g 6= x 2z 2 –z 3

Нужно рассмотреть обновлённый состав S –полиномов:

S ( g 3 , g 5) , S ( g 2 , g 6) , S ( g 3 , g 6), S ( g 4 , g 6) , S ( g 5, g 6)

Нетрудно проверить, что G редуцирует все эти S –полиномы к нулю.

Таким образом, G = { g 2 , g 3, g 4, g 5, g 6}является стандартным базисом данного идеала.

Критерий Бухбергера

Рассмотренный пример наглядно показывает,Что отыскание стандартного базиса может быть весьма трудоёмко. Поэтому полезно применять те или иные методы оптимизации алгоритма.Бухбергер определил критерий исключающий некоторые S –полиномы из рассмотрения. Критерий Бухбергера. Если имеется элемент h базиса G,

такой, что его старший моном делит НОК старших мономов полиномов f и g ,

и, если мы уже рассмотрели S –полиномы S ( f , h ) и S ( h , g),

то не обязательно рассматривать S –полином S ( f , g ) , т.к. он будет редуцирован к нулю. Выбор S –полиномов Пока остаётся открытым ещё один важный вопрос–

она и более рациональном порядке рассмотрения S –полиномов для полиномов множества G и о сложности таких вычислений.

В общем случае существует несколько S –полиномов, которые нужно рассмотреть даже после применения критерия Бухбергера.При любом выборе алгоритм даст один и тот же результат, но время счёта может быть различным. Утверждение(Бухбергер). Выбор S –полинома, НОК старших мономов которого имеет минимальную суммарную степень (среди всехS –полиномов, которые нужно рассмотреть)

Успешно согласуется с критерием Бухбергера.

Сложность алгоритма–1

Наличие алгоритма не означает, что легко решить любую задачу. Доказав конечность предложенного алгоритма построения стандартного базиса, Бухбергер не оценил:

(1) границ времени счёта;

(2) числа полиномов в стандартном базисе.

В последствии было показано, что вычисление стандартного базиса требует в общем случае объёма памяти, экспоненциально зависящего от числа переменны хn .

Далее проанализируем некоторые оценки сложности алгоритма Бухбергера,

Которые были получены пр иn = 1 , n = 2 иn > 2.

Сложность алгоритма–2

Случай одной переменной( n = 1)тривиален.

Замечание. В случае одной переменной и двух полиномов алгоритм Бухбергера эквивалентен алгоритму Евклида отыскания НОД

Этих двух полиномов. Для случая двух переменных( n = 2 )показано,

Что если все данные имеют общую степень, ограниченную числом d , то общая степень элементов стандартного базиса ограничена числом(2 d –1 ),

Если используется порядок«общей степени»(степенно-лексикографический),

И всегда ограничена числом d 2. Более того, число элементов в стандартном базисе ограничено числом( k + 1 ),

Где k –минимум общих степеней старших мономов всех данных. Замечание. Вышеуказанные границы являютс ялучшими из возможных.