2.4 Дисконтирование по простым процентным ставкам. Наращение по учетной ставке

На практике часто приходится решать задачу, обратную наращению процентов, когда по заданной сумме S, соответствующей концу финансовой операции, требуется найти исходную сумму P. Расчет P по S называется *дисконтированием* суммы S. Величину P, найденную дисконтированием, называют *современной величиной* (*текущей стоимостью*) суммы S. Проценты в виде разности $D = S - P$ называются *дисконтом* или *скидкой*. Процесс начисления и удержания процентов вперед (в виде дисконта) называют *учетом*. Дисконт как скидка с конечной суммы долга может определяться через процентную ставку или в виде абсолютной величины.

Таким образом, на практике используются два принципа расчета процентов: путем наращения суммы кредита (*прямой*) и установления скидки с конечной суммы долга (*обратный*).

В большинстве случаев фактор времени учитывается в финансовых контрактах именно с помощью дисконтирования. Величина P эквивалентна сумме S в том смысле, что через определенный период времени и при заданной ставке процентов она в результате наращения станет равной S. Поэтому операцию дисконтирования называют также приведением. Но понятие приведения шире, чем дисконтирование. *Приведение* – это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени. Если некоторая сумма приводится к более ранней дате, чем текущая, то применяется дисконтирование, если же речь идет о более поздней дате, то – наращение.

В зависимости от вида процентной ставки применяют два метода дисконтирования: *математическое дисконтирование* и *банковский* (*коммерческий*) *учет*. В первом случае применяется ставка наращения, во втором – учетная ставка.

2.4.1 Математическое дисконтирование

Математическое дисконтирование – этот вид дисконтирования, представляющий собой решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды. Если в прямой задаче

$$S = P(1 + ni),$$

то в обратной

$$P = \frac{S}{1 + ni}. \tag{2.10}$$

Дробь в правой части равенства при величине S называется *дисконтным множителем*. Этот множитель показывает, какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга. Дисконт суммы S равен

$$D = S - P.$$

Пример 2.8 Сумма в 5 млн. у.е. выплачивается через 5 лет. Какова ее современная величина при условии, что применяются простые проценты по ставке 10% годовых?

Решение.

Согласно формуле дисконтирования по простому проценту:

$$P = \frac{S}{1+5i} = \frac{5\cdot 10^6}{1+5\cdot 0{,}1} = \frac{5\cdot 10^6}{1{,}5} \approx 3333333{,}33 \text{ (у.е.)}.$$

2.4.2 Банковский учет (учет векселей)

Банковский или *коммерческий учет*. Операция учета (учета векселей) заключается в том, что банк до наступления срока платежа по векселю или другому платежному обязательству покупает его у владельца (являющегося кредитором) по цене ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т.е. приобретает (учитывает) его с дисконтом.

Для расчета процентов при учете векселей применяется *учетная ставка*, которую мы обозначим символом d.

По определению, простая годовая учетная ставка находится как

$$d = \frac{S-P}{Sn}.$$

Размер дисконта или учета, удерживаемого банком, равен $D = Snd$, откуда

$$P = S - D = S - Snd = S\left(1-nd\right). \qquad (2.11)$$

Множитель $\left(1-nd\right)$ называется *дисконтным множителем*. Срок n измеряет период времени от момента учета векселя до даты его погашения в годах. Из формулы (2.11) следует, что при $n > \dfrac{1}{d}$ величина дисконтного множителя и, следовательно, суммы P станет отрицательной. Иначе говоря, при относительно большом сроке векселя учет может привести к нулевой или даже отрицательной сумме P, что лишено смысла. Например, при $d = 20\%$ уже пятилетний срок достаточен для того, чтобы владелец векселя ничего не получил при его учете.

Дисконтирование по учетной ставке производится, чаще всего, при условии, что год равен 360 дням.

Пример 2.9 Тратта (переводной вексель) выдан на сумму 1 млн. грн. с уплатой 17.11.16. Владелец векселя учел его в банке 23.09.16 по учетной ставке 20% годовых. Найти дисконт.

Решение.

Оставшийся до конца срока период составит 55 дней. Полученная при учете сумма (без уплаты комиссионных) равна:

$$P = 1000000\cdot\left(1-\frac{55}{360}\cdot 0{,}2\right) = 969444{,}4 \text{ грн.}$$

Дисконт составит $D = S - P = 1000000 - 969444{,}4 = 30555{,}6$ грн.

В том случае, когда учету подлежит долговое обязательство, предусматривающее начисление простых процентов на первоначальную сумму долга, необходимо решить две задачи: (1) определить конечную сумму долга на момент его погашения; (2) рассчитать сумму, получаемую при учете, путем дисконтирования конечной суммы долга, применяя учетную ставку, действующую в момент учета.

Решение двух этих задач можно записать в виде одной формулы, содержащей наращение по ставке простых процентов, фигурирующей в долговом обязательстве, и дисконтирование по учетной ставке:

$$P_2 = P_1 \cdot (1 + n_1 i)(1 - n_2 d), \qquad (2.12)$$

где P_1 – первоначальная сумма ссуды, P_2 – сумма, получаемая при учете обязательства, n_1 – общий срок платежного обязательства, в течение которого начисляются проценты, n_2 – срок от момента учета до погашения долга.

Пример 2.10 Тратта (переводной вексель) выдан на 120 дней на сумму 1 млн. грн. с уплатой 17.11.16 по ставке процентов $i = 20{,}5\%$ годовых. Владелец векселя учел его в банке 23.09.16 по учетной ставке 20% годовых. Найти дисконт.

Решение.

Пусть в данном примере $n_1 = \frac{120}{360}$, тогда

$$P_2 = 1000000\left(1 + \frac{120}{360} \cdot 0{,}205\right)\left(1 - \frac{55}{360} \cdot 0{,}2\right) = 1035690 \text{ грн.}$$

2.4.3 Наращение по учетной ставке

Простая учетная ставка иногда применяется и при расчете наращенной суммы. Например, при определении суммы, которую надо проставить в векселе, если задана текущая сумма долга. Учетная ставка может использоваться для наращения, т.е. для расчета S по P. В этом случае из формулы (2.11) следует, что

$$S = \frac{P}{1 - nd}. \qquad (2.13)$$

Множитель наращения здесь равен $\frac{1}{1 - nd}$. Наращение не пропорционально ни сроку, ни ставке. Заметим, что при $n > \frac{1}{d}$ расчет лишен смысла, так как наращенная сумма становится бесконечно большим числом. Такая ситуация не возникает при математическом дисконтировании: при любом сроке современная величина платежа больше нуля.

Пример 2.11 Ссуда в размере 1 млн. грн. выдана 20.01 до 05.10 включительно под 18% годовых. Определить сумму, которую надо проставить в векселе.

Решение.

Определим наращенную сумму при условии, что проценты начисляются по простой учетной ставке $d = 18\%$:

$$S = \frac{P}{1-nd} = \frac{1000000}{1-\frac{258}{360}\cdot 0{,}18} = 1148105{,}62 \text{ грн.}$$

2.5 Прямые и обратные задачи при начислении процентов и дисконтировании по простым ставкам

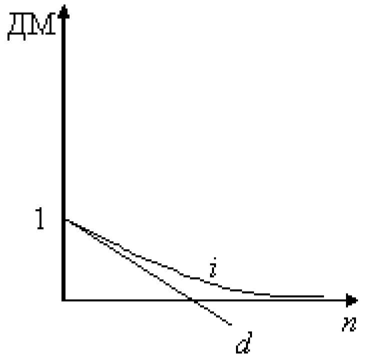
Для процентной ставки прямой задачей является определение наращенной суммы, обратной – дисконтирование. Для учетной ставки прямая задача – дисконтирование, обратная – наращение.

Рассмотренные два метода наращения и дисконтирования (по ставке наращения i и учетной ставке d) приводят к разным результатам даже тогда, когда $i = d$.

Таблица 2.4 – Прямые и обратные задачи

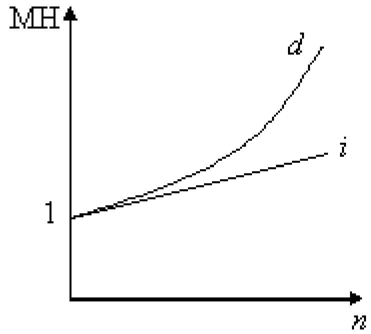
Ставки	Прямая задача	Обратная задача
i	$S = P\cdot(1+ni)$	$P = \frac{S}{1+ni}$
d	$P = S\cdot(1-nd)$	$S = \frac{P}{1-nd}$

Заметим, что учетная ставка отражает фактор времени более жестко. Влияние этого фактора усиливается при увеличении процентной ставки. Для иллюстрации сказанного на рис. 2.12 и 2.13 приведены дисконтный множитель и множитель наращения для случая, когда $i = d$.



ДМ – дисконтный множитель

Рисунок 2.12



МН – множитель наращения

Рисунок 2.13

Таким образом, выбор конкретного вида процентной ставки заметно влияет на финансовые итого операции. Однако возможен такой подбор величин ставок, при котором результаты наращения или дисконтирования будут одинаковыми. Такие ставки называются *эквивалентными*, их мы рассмотрим далее.

2.6 Определение срока ссуды и величины процентной ставки

При разработке условий контрактов или их анализе и сравнении возникает необходимость в решении ряда, если так можно назвать, вторичных задач – определении срока ссуды и размера процентной ставки в том или ином ее виде при всех прочих заданных условиях.

2.6.1 Определение продолжительности ссуды

Иногда задача ставится таким образом, что требуется найти временной интервал, за который исходная сумма P при заданной ставке процентов вырастет до нужной величины S, или срок, обеспечивающий определенный дисконт с заданной величиной. Другими словами, речь идет о решении формул (2.1) и (2.11) относительно n.

Срок в годах:

$$n = \frac{S-P}{Pi} = \frac{\frac{S}{P}-1}{i}, \tag{2.12}$$

$$n = \frac{S-P}{Sd} = \frac{1-\frac{P}{S}}{d}. \tag{2.13}$$

Срок в днях ($n = \frac{t}{K}$, где K – временная база):

$$t = \frac{S-P}{Pi}K = \frac{\frac{S}{P}-1}{i}K, \tag{2.14}$$

$$t = \frac{S-P}{Sd}K = \frac{1-\frac{P}{S}}{d}K. \tag{2.15}$$

Пример 2.12 Какова должна быть продолжительность ссуды в днях для того, чтобы долг, равный 1000 тыс. грн., вырос до 120 тыс. грн. при условии, что начисляются простые проценты по ставке 25% годовых при точном подсчете дней?

Решение.

По формуле (2.14) находим

$$t = \frac{120-100}{100 \cdot 0,25} \cdot 365 = 292 \text{ дня.}$$

2.6.2 Определение уровня процентной ставки

Уровень процентной ставки может служить мерой доходности операции, критерием сопоставления альтернатив и выбора наиболее выгодных условий.

Из тех же формул (2.1) и (2.11) получаем ставку наращения i и учетную ставку d для сроков, измеренных в годах и днях:

$$i = \frac{S-P}{Pn} = \frac{S-P}{Pt} K, \tag{2.16}$$

$$d = \frac{S-P}{Sn} = \frac{S-P}{St} K, \tag{2.17}$$

Напомним, что срок n в двух формулах имеет разный смысл: в первом случае это весь срок операции, а во втором – оставшийся срок до погашения.

Пример 2.13 Определить доходность операции для кредитора, если им предоставлена ссуда в размере 2 млн. грн. на 100 дней и контракт предусматривает сумму погашения долга 2,5 млн. грн. Доходность выразить в виде простой ставки процентов i и учетной ставки d. Временную базу принять равной $K = 360$ дней.

Решение.

$$i = \frac{S-P}{Pt} K = \frac{2,5-2}{2 \cdot 100} \cdot 360 = 0,9 \text{, т.е. } 90\%,$$

$$d = \frac{S-P}{St} K = \frac{2,5-2}{2,5 \cdot 100} \cdot 360 = 0,72 \text{, т.е. } 72\%.$$

Иногда размер дисконта в контрактах фиксируется на весь срок ссуды в виде доли (или процента) от суммы погасительного платежа. Таким образом, уровень процентной ставки здесь задается в неявном виде. Но нетрудно вывести формулы, с помощью которых значения этих ставок можно вычислить.

Пусть S – размер погасительного платежа, d_n – доля этого платежа, определяющая величину дисконта за весь срок ссуды n. Требуется определить, каким уровням годовых ставок i и d эквивалентны такие условия. Так как S – сумма возврата в конце срока ссуды, $P = S(1-d_n)$ – реально выдаваемая ссуда в момент заключения договора:

$$i = \frac{S-P}{Pn} = \frac{S - S(1-d_n)}{S(1-d_n)n} = \frac{d_n}{(1-d_n)n}, \tag{2.18}$$

$$d = \frac{S-P}{Sn} = \frac{S - S(1-d_n)}{Sn} = \frac{d_n}{n}, \tag{2.19}$$

Пример 2.14 Кредитор и заемщик договорились, что из суммы кредита, выданного на 200 дней, сразу удерживается дисконт в размере 25% указанной суммы. Требуется определить цену кредита в виде простой годовой учетной ставки d и годовой ставки простых процентов i. Считать временную базу K равной 365 дням.

Решение.

$$d = \frac{d_n}{n} = \frac{0,25}{200/365} = 0,45625 \text{, т.е. } 45,625\%,$$

$$i = \frac{d_n}{(1-d_n)n} = \frac{0,25}{(1-0,25) \cdot 200/365} = 0,60833 \text{, т.е. } 60,833\%.$$