3.1 Начисление сложных процентов

3.1.1 Формула наращения

В средне- и долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга, применяют сложные проценты. База для их начисления увеличивается с каждым шагом во времени. Процесс увеличения суммы долга происходит с ускорением. Наращение по сложным процентам можно представить как последовательные реинвестирования средств, вложенных под простые проценты на один период начисления. Присоединение начисленных процентов к сумме долга, которая послужила базой для их начисления, часто называют *капитализацией процентов*.

Если проценты начисляются и капитализируются один раз в году, то в конце первого года проценты составят Pi, а наращенная сумма – $P + Pi = P(1+i)$. К концу второго года наращенная сумма будет $P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)^2$ и т.д. В конце n-го года

$$S = P(1+i)^n, \tag{3.1}$$

где n – число лет, i – процентная ставка, $(1+i)^n$ – *множитель наращения по сложным процентам*.

Проценты за этот срок в целом таковы:

$$I = S - P = P\cdot(1+i)^n - P = P\cdot\left((1+i)^n - 1\right). \tag{3.2}$$

Часть из них получена за счет начисления процентов на проценты. Она равна:

$$I_p = I^{\text{сложные}} - I^{\text{простые}} = P\cdot\left((1+i)^n - 1\right) - Pni =$$
$$= P\cdot\left((1+i)^n - 1 - ni\right) = P\cdot\left((1+i)^n - (1+ni)\right). \tag{3.3}$$

Рост по сложным процентам является процессом, соответствующим геометрической прогрессии с первым членом, равным P, и знаменателем $(1+i)$. Последний член прогрессии равен наращенной сумме в конце срока ссуды. Графическая иллюстрация наращения по сложным процентам представлена на рис. 3.1.

В практических расчетах в основном применяют дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т.д.).

Отметим, что при сроке $n<1$ наращение по простым процентам дает больший результат, чем по сложным, а при $n>1$ – наоборот. В этом нетрудно убедиться на конкретных числовых примерах. Наибольшее превышение суммы, наращенной по простым процентам, над суммой, наращенной по сложным процентам, (при одинаковых процентных ставках) достигается в средней части периода.

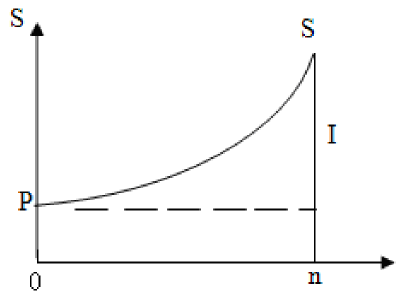

Рисунок 3.1

Формулы (3.1) – (3.3) предполагают, что проценты на проценты начисляются по той же ставке, что и при начислении на основную сумму долга. Усложним условия начислений процентов. Пусть проценты на основной долг начисляются по ставке i, а проценты на проценты – по ставке $r \neq i$. В этом случае

$$S = P + Pi \cdot \left(1 + (1+r) + (1+r)^2 + \ldots + (1+r)^{n-1}\right) = P \cdot \left(1 + i \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}\right). \quad (3.4)$$

Пример 3.1 Какой величины достигнет долг, равный 1 млн. грн., через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5 % годовых?

Решение.

По формуле (3.1) получим

$$S = 1 \cdot (1 + 0{,}155)^5 = 2{,}05546422 \text{ млн. грн.}$$

3.1.2 Начисление процентов в смежных календарных периодах

Выше при начислении процентов не принималось во внимание расположение срока начисления процентов относительно календарных периодов. Вместе с тем, часто даты начала и окончания ссуды находятся в двух периодах. Ясно, что начисленные за весь срок проценты не могут быть отнесены только к последнему периоду. Соответственно возникает задача распределения начисленных процентов по периодам.

Алгоритм деления общей массы процентов легко сформулировать на основе графика, построенного для двух смежных календарных периодов (см. рис. 3.2). Общий срок ссуды делится на два периода n_1 и n_2. Тогда

$$I = I_1 + I_2,$$

где $I_1 = P \cdot \left((1+i)^{n_1} - 1\right)$,

$$I_2 = P \cdot (1+i)^{n_1} \cdot \left((1+i)^{n_2} - 1\right) = P \cdot \left((1+i)^{n_1} \cdot (1+i)^{n_2} - (1+i)^{n_1}\right) =$$

$$= P \cdot \left((1+i)^n - (1+i)^{n_1}\right).$$

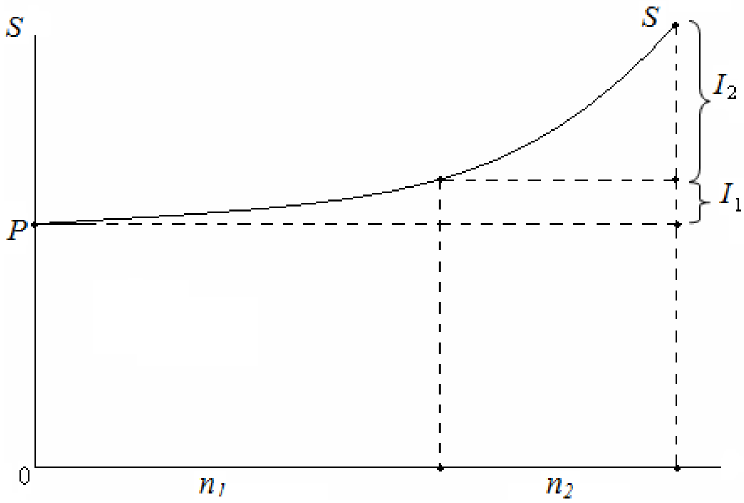

Рисунок 3.2

Пример 3.2 Ссуда была выдана на 2 года: с 01.05.06 по 01.05.08. Размер ссуды – 10 млн. грн. Ставка 14% годовых (ACT/ACT). Необходимо распределить начисленные проценты по календарным годам.

Решение.

За период с 01.05.06 по 31.12.06 (244 дня):

$$I_{06} = 10000 \cdot \left((1+0{,}14)^{\frac{244}{365}} - 1 \right) = 915{,}4 \text{ тыс. грн.}$$

За 2007 год:

$$I_{07} = 10000 \cdot (1+0{,}14)^{\frac{244}{365}} \cdot \left((1+0{,}14)^{1} - 1 \right) = 1528{,}2 \text{ тыс. грн.}$$

За период с 01.01.08 по 01.05.08 (121 день):

$$I_{08} = 10000 \cdot (1+0{,}14)^{1\frac{244}{365}} \cdot \left((1+0{,}14)^{\frac{121}{365}} - 1 \right) = 552{,}4 \text{ тыс. грн.}$$

Таким образом, $I = I_{06} + I_{07} + I_{08} = 2996$ тыс. грн.

Аналогичный результат можно подсчитать для всего срока в целом:

$$I = 10000 \cdot \left((1+0{,}14)^{2} - 1 \right) = 2996 \text{ тыс. грн.}$$

3.1.3 Формула наращения по сложным процентам, когда ставка меняется во времени (переменные ставки)

В том случае, когда ставка сложных процентов меняется во времени, формула наращения имеет следующий вид

$$S = P \cdot (1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+i_k)^{n_k}, \qquad (3.5)$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ – последовательные значения процентных ставок в периодах $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Пример 3.3 В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 20% годовых плюс маржа 10% в первые два года, 8% в третий год, 5% в четвертый год. Определить величину множителя наращения за 4 года.

Решение.

$$(1+0,3)^2 \cdot (1+0,28) \cdot (1+0,25) = 2,704 .$$

3.1.4 Начисление процентов при дробном числе лет

Часто срок в годах для начисления процентов не является целым числом. В правилах ряда коммерческих банков для некоторых операций проценты начисляются только за целое число лет или других периодов начисления. Дробная часть периода отбрасывается. В большинстве же случаев учитывается полный срок. При этом применяют два метода:

1) *Общий метод*. Расчет ведется непосредственно по формуле (3.1).

2) *Смешанный метод*. Предусматривает начисление процентов за целое число лет по формуле сложных процентов и за дробную часть года – по формуле простых процентов:

$$S = P \cdot (1+i)^a \cdot (1+bi), \tag{3.6}$$

где $n = a + b$ – срок ссуды, a – целое число лет, b – дробная часть года.

Аналогичный метод применяется и в случаях, когда периодом начисления является полугодие, квартал или месяц. Следует иметь в виду, что множитель наращения по смешанному методу оказывается несколько больше, чем по общему, т.к. для $n < 1$ справедливо соотношение: $1 + ni > (1+i)^n$. Наибольшая разница при $b = \frac{1}{2}$.

Пример 3.4 Кредит в размере 3 млн. грн. выдан на 3 года и 160 дней. Ставка – 16,5% сложных годовых. Найти сумму долга на конец срока.

Решение.

Вычислим срок кредита: $n = 3 + \frac{160}{365} = 3,43836$ года.

1. Общий метод (по формуле (3.1)):

$$S = 3000000 \cdot (1+0,165)^{3,43836} = 5071935,98 \text{ грн.}$$

2. Смешанный метод:

$$S = 3000000 \cdot (1+0,165)^3 \cdot (1+0,43836 \cdot 0,165) = 5086595,98 \text{ грн.}$$

3.2 Сравнение роста по сложным и простым процентам

Для того, чтобы сопоставить результаты наращения по разным процентным ставкам, достаточно сравнить соответствующие множители наращения. Нетрудно убедиться в том, что при одинаковых уровнях процентных ставок соотношения этих множителей существенно зависят от срока. При условии, что временная база для начисления процентов одна и та же, находим следующие соотношения:

1) для срока меньше года ($n<1$) простые проценты больше сложных:

$$\left(1+ni_{\text{пр}}\right)>\left(1+i_{\text{сл}}\right)^{n},$$

здесь $i_{\text{пр}}$ – ставка простых процентов;

2) для срока больше года ($n>1$) сложные проценты больше простых:

$$\left(1+ni_{\text{пр}}\right)<\left(1+i_{\text{сл}}\right)^{n};$$

3) для срока, равного году ($n=1$), множители наращения равны друг другу:

$$\left(1+ni_{\text{пр}}\right)=\left(1+i_{\text{сл}}\right)^{n}.$$

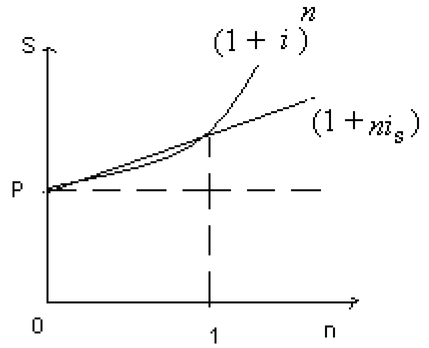

Рисунок 3.3

Сравним множители наращения при $i_{\text{пр}}=i_{\text{сл}}=12\%$, $K=365$ дней (см. табл. 3.1).

Таблица 3.1 – Сравнение множителей наращения при $i_{\text{пр}}=i_{\text{сл}}=12\%$, $K=365$ дней

Множитель наращения	Срок ссуды					
	30 дней	180 дней	1 год	5 лет	10 лет	100 лет
$1+ni$	1,01644	1,05918	1,12	1,6	2,2	13
$\left(1+i\right)^{n}$	1,00936	1,05748	1,12	1,76234	3,10584	83522,3

В целях оценки своих перспектив кредитору и должнику интересно знать, через сколько лет сумма ссуды возрастет в N раз при данной процентной ставке. Для этого приравняем множитель наращения величине N, в результате получим:

а) для простых процентов $1+ni_{\text{пр}}=N$, тогда

$$n=\frac{N-1}{i_{\text{пр}}}; \qquad (3.7)$$

б) для сложных процентов $\left(1+i_{\text{сл}}\right)^{n}=N$, тогда

$$n=\frac{\ln N}{\ln\left(1+i_{\text{сл}}\right)}. \tag{3.8}$$

Для случая $N=2$ формулы (3.7) и (3.8) называются *формулами удвоения* и принимают следующий вид:

а) для простых процентов

$$n=\frac{1}{i_{\text{пр}}}; \tag{3.9}$$

б) для сложных процентов

$$n=\frac{\ln 2}{\ln\left(1+i_{\text{сл}}\right)}. \tag{3.10}$$

Если формулу (3.9) легко применять для прикидочных расчетов, то формула (3.10) требует применения калькулятора. Однако при небольших ставках процентов (скажем, менее 10%) вместо нее можно использовать более простую приближенную. Ее легко получить, если учесть, что $\ln 2\approx 0{,}7$, а $\ln\left(1+i_{\text{сл}}\right)\approx i$. Тогда

$$n=\frac{0{,}7}{i}. \tag{3.11}$$

Пример 3.5 Найти сроки удвоения для $i_{\text{пр}}=i_{\text{сл}}=22{,}5\%$.

Решение.

$$n=\frac{1}{0{,}225}=4{,}44; \qquad n=\frac{\ln 2}{\ln\left(1+0{,}225\right)}=3{,}04.$$

3.3 Наращение процентов *m* раз в году. Номинальная и эффективная ставки

3.3.1 Номинальная ставка

При начислении процентов несколько раз в году можно воспользоваться формулой (3.1). В этом случае n означает число периодов начисления, а i – ставка за соответствующий период. Пусть j – годовая ставка, а m – число периодов начисления в году. Каждый раз проценты начисляются по ставке $\frac{j}{m}$. Ставку j называют *номинальной*. Формула наращения:

$$S=P\cdot\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}. \tag{3.12}$$

Если срок ссуды измеряется дробным числом периодов начисления, можно рассчитывать несколькими способами, приводящими к различным результатам:

1) по формуле сложных процентов

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{N}{\tau}}, \tag{3.13}$$

где $\frac{N}{\tau}$ – число периодов начисления процентов, τ – период начисления процентов.

2) по смешанной формуле

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{a} \left(1 + b\frac{j}{m}\right), \tag{3.14}$$

где a – целое число периодов начисления, т.е. $a = \left[\frac{N}{\tau}\right]$ – целая часть от деления всего срока ссуды N на период начисления τ, b – оставшаяся дробная часть периода начисления ($b = \frac{N}{\tau} - a$).

Пример 3.6 Какой величины достигнет долг, равный 1 млн. грн., через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5% годовых, при этом проценты начисляются не один раз в году, а поквартально?

Решение.

По формуле (3.12) получим

$$S = 1000000 \cdot (1 + \frac{0{,}155}{4})^{20} = 2139049{,}01 \text{ грн.}$$

А при ежегодном начислении процентов мы получим

$$S = 1000000 \cdot (1 + 0{,}155)^{5} = 2055464{,}22 \text{ грн.}$$

При целом значении N в большинстве случаев для определения величины множителя наращения можно воспользоваться таблицей сложных процентов (см. приложение). Например, при $j = 20\%$ и поквартальном начислении процентов ($m = 4$) в течение 5 лет отыскиваем табличное значение множителя для $i = \frac{j}{m} = \frac{20}{4} = 5\%$ и $N = 5 \cdot 4 = 20$; находим $q = 2{,}653298$.

Чем чаще начисляются проценты, тем быстрее идет *процесс наращения* (*цепной процесс*). Например, для $j = 20\%$, $n = 10$ лет и разной частоте наращения в пределах года, получим следующую таблицу:

Таблица 3.2 – Множители наращения для $j = 20\%$, $n = 10$ лет и разной частоте наращения в пределах года

m	1	2	4	12	365
Множитель наращения	6,1917	6,7275	7,04	7,2682	7,385

Как следует из приведенных данных, наибольшую «прибавку» в наращении дает переход от ежегодного начисления процентов к полугодовому, наименьший эффект – переход от ежемесячного к ежедневному.

Пример 3.7 Размер ссуды, предоставленной на 28 месяцев, равен 20 млн. ден. ед. Номинальная ставка равна 60% годовых; начисление процентов ежеквартальное. Вычислить наращенную сумму в трех ситуациях:

- на дробную часть начисляются сложные проценты;
- на дробную часть начисляются простые проценты;
- дробная часть не учитывается.

Результаты расчетов сравнить.

Решение.

Всего $N = 28:3 = 9\frac{1}{3}$ периодов начисления, т.е. 9 кварталов и 1 месяц:

1) $S = 20 \cdot \left(1 + \frac{0,6}{4}\right)^{9\frac{1}{3}} = 73,713$ млн. ден. ед.;

2) $S = 20 \cdot \left(1 + \frac{0,6}{4}\right)^{9} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{0,6}{4}\right) = 73,875$ млн. ден. ед.;

3) $S = 20 \cdot \left(1 + \frac{0,6}{4}\right)^{9} = 70,358$ млн. ден. ед.

Из полученных результатов расчета следует, что наибольшего значения наращенная сумма достигает во втором случае, т.е. при начислении на дробную часть простых процентов. Таким образом, для ссудодателя выгоднее второй вариант, так как итоговая сумма получается максимальной, а для заемщика предпочтительнее третий вариант, так как итоговая сумма минимальна.

3.3.2 Эффективная ставка

Другое название – действительная ставка. Она измеряет тот реальный относительный доход, который получают в целом за год. Иначе говоря, *эффективная ставка* – это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и m - разовое начисление процентов по ставке $\frac{j}{m}$.

Обозначим эффективную ставку через i. По определению множители наращения по двум ставкам (эффективной ставке и номинальной ставке при m-кратном начислении процентов) должны быть равны друг другу:

$$\left(1 + i\right)^{n} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}.$$

Отсюда следует:

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} - 1. \qquad (3.15)$$

Обратная зависимость имеет вид:

$$j = m\left(\left(1+i\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right). \qquad (3.16)$$

При $m > 1$ эффективная ставка больше номинальной.

Если в договоре номинальная ставка j при m- кратном начислении процентов заменяется на эффективную ставку i, то финансовые обязательства сторон договора не изменятся. Обе ставки эквивалентны в финансовом отношении. Поэтому разные по величине номинальные ставки оказываются *эквивалентными*, если соответствующие им эффективные ставки одинаковы.

Пример 3.8 Найти размер эффективной ставки, если номинальная ставка равна 25% при ежемесячном начислении процентов.

Решение.

$$i = \left(1 + \frac{0,25}{12}\right)^{12} - 1 = 0,280732.$$

Для участвующих в сделке сторон безразлично, применить ставку 25 % при ежемесячном начислении процентов или годовую (эффективную) ставку 28,0732 %.

Введем обозначение $j^{(m)}$ – размер номинальной ставки и число начислений за год. Эквивалентная замена номинальной ставки имеет место только когда выполняется равенство:

$$\left(1 + \frac{j_1^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1 + \frac{j_2^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2}.$$

Поскольку m может принимать только целые значения, то удобнее определять значение новой ставки, задавшись величиной m_2:

$$j_2^{(m_2)} = m_2\left(\left(1 + \frac{j_1^{(m_1)}}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1\right).$$

Пример 3.9 Определить номинальную ставку $j^{(4)}$, которая безубыточно заменяет ставку $j^{(12)} = 25\%$ в примере 13.

Решение.

$$j^{(4)} = 4 \cdot \left(\left(1 + \frac{0,25}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1\right) = 0,25524.$$

Таким образом, сокращение количества начислений потребует увеличения ставки с 25% до 25,524 %.

При подготовке контрактов может возникать необходимость определения j по заданным значениям i и m:

$$j = m \cdot \left(\sqrt[m]{1+i} - 1 \right). \tag{3.17}$$

Пример 3.10 Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки 10% годовых.

Решение.

$$i = \left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}1038 \text{, т.е. } 10{,}38\%.$$

Пример 3.11 Определить какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 12% годовых.

Решение.

$$j = 4\left(\left(1 + 0{,}12\right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right) = 0{,}11495 \text{, т.е. } 11{,}495\%.$$