

2 ПРОСТЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ СТАВКИ НАРАЩЕНИЯ

Основные формулы

название	формула	составляющие
наращенная сумма при дискретно изменяющихся во времени процентных ставках	$S = P \left(1 + \sum_{t=1}^m n_t i_t \right)$	<p>P – первоначальная сумма (ссуда);</p> <p>i_t – ставка простых процентов в периоде с номером $t = \overline{1, m}$;</p> <p>n_t – продолжительность периода t – периода начисления по ставке i_t</p>
начисление процентов при изменении суммы депозита во времени	$I = \sum_j R_j n_j i$	<p>R_j – остаток средств на счете в момент j после очередного поступления или списания средств;</p> <p>n_j – срок хранения денег до нового изменения остатка средств на счете</p>
	$I = \sum_j R_j n_j i = \frac{\sum R_j t_j}{100} \cdot \frac{K}{i}$	<p>K – число дней в году;</p> <p>t_j – срок в днях между последовательными изменениями остатков на счете</p>
реинвестирование по простым процентам	$S = P \prod_{t=1}^m (1 + n_t i_t)$	<p>n_1, n_2, \dots, n_m – продолжительности последовательных периодов реинвестирования;</p> <p>i_1, i_2, \dots, i_m – ставки, по которым производится реинвестирование</p>
реинвестирование по простым процентам	$S = P (1 + ni)^m$	<p>m – число повторений реинвестирования;</p> <p>n_t – неизменные промежуточные строки;</p> <p>i_t – неизменные промежуточные ставки</p>

Примеры решения

Пример 1 Пусть в договоре, рассчитанном на год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 10% годовых, а на каждый после-

дующий на 1% меньше, чем в предыдущий. Определить множитель наращенения за весь срок договора.

Решение.

$$1 + \sum n_t i_t = 1 + 0,25 \cdot 0,10 + 0,25 \cdot 0,09 + 0,25 \cdot 0,08 + 0,25 \cdot 0,07 = 1,085.$$

Пример 2 Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год – 16 %, в каждом последующим полугодии ставка повышается на 1 %. Необходимо найти множитель наращенения за 2,5 года.

Решение.

$$1 + \sum n_t i_t = 1 + 1 \cdot 0,16 + 0,5 \cdot 0,17 + 0,5 \cdot 0,18 + 0,5 \cdot 0,19 = 1,43.$$

Пример 3 В начале года ставка процентов по вкладам до востребования составляла 55% годовых. Через 3 месяца ставка была уменьшена до 30%, а через 5 месяцев до 12% годовых. Определить сумму процентов, начисленную на вклад 30 тыс. грн. за год.

Решение.

Так как схема начисления простых процентов предполагает начисление только на первоначальную сумму, то

$$I = 30000 \left(0,55 \cdot \frac{3}{12} + 0,3 \cdot \frac{5}{12} + 0,12 \cdot \frac{4}{12} \right) = 9078 \text{ грн.}$$

Пример 4 Сумма вклада 1500 тыс. грн. Вклад размещен в банк сроком на 6 лет, при этом в течение первых трех лет ставка процентов составит 10% годовых, следующие два года 15% и течении последнего года 20% годовых. Рассчитать наращенную сумму.

Решение.

$$S = 1500(1 + 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,15 + 0,2) = 2700 \text{ тыс. грн.}$$

Пример 5 В договоре, рассчитанном на год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 8% годовых, а на каждый последующий на 0,5% меньше, чем в предыдущий. Определить сумму на счете в конце года, если начальная сумма равна 2000 грн.

Решение.

На рабочем листе подготовьте исходные данные для расчета и введите формулы, как показано (см. рис. 2.1).

	А	В	С
1	Начальная сумма	2000	
2	Квартал	Ставка	Множитель наращенения
3	1	0,08	=B3/4
4	2	=B3-0,005	=B4/4
5	3	=B4-0,005	=B5/4
6	4	=B5-0,005	=B6/4
7		Итог	=B1*(1+СУММ(C3:C6))
8			

Рисунок 2.1

Результаты расчетов представлены на рисунке 2.2.

	А	В	С
1	Начальная сумма	2000	
2	Квартал	Ставка	Множитель наращенния
3	1	8,00%	0,02
4	2	7,50%	0,01875
5	3	7,00%	0,0175
6	4	6,50%	0,01625
7		Итого	2145

Рисунок 2.2

Сумма в конце года составит 2145 грн.

Пример 5 Движение средств на счет характеризуется следующими данными: 5 февраля 2015 года, поступило 12 млн. грн., 10 июля снято 4 млн. грн., 20 октября поступило 8 млн. грн. Процентная ставка – 18% годовых. Найти сумму на счете на конец года.

Решение.

При определении расчетного количества дней примем английский способ, т.е. 365 дней в году и точным количеством дней в месяце. Процентный делитель

$\frac{K}{i} = \frac{365}{18} = 20,27778$. Схема решения представлена в табл. 2.2

Таблица 2.1 – Схема решения примера 5

Дата	Движение средств	Остаток, R_j	Срок, t_j (дней)	Процентное число, $\frac{\sum R_j t_j}{100}$
05.02.15	12	12	155	18,60
10.07.15	-4	8	102	8,16
20.10.15	8	16	72	11,52
31.12.15	-	16	-	-
Итого				38,28

Сумма процентов за весь срок составит $I = \frac{38,28}{20,27778} = 1,888$ млн. грн., а

наращенная сумма $S = 12 + 1,888 = 13,888$ млн. грн.

Пример 6 Вклад 150 тыс. грн. был размещен в банке 25.05.2013 под 80% годовых. Затем 05.07.2013 добавлена сумма 50 тыс. грн.; 15.09.2013 было снято 70 тыс. грн., а 20.12.2013 счет был закрыт. Определить общую сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета.

Решение.

При определении расчетного количества дней примем германский способ, т.е. 360 дней в году и 30 дней в целом месяце. Процентный делитель $\frac{K}{i} = \frac{360}{80} = 4,5$. Схема решения представлена в табл. 2.3.

Таблица 2.2 – Схема решения примера 6

Дата	Движение средств	Остаток, R_j	Срок, t_j (дней)	Процентное число, $\frac{\sum R_j t_j}{100}$
25.03.13	150	150	40	60
05.07.13	50	200	70	140
15.09.13	-70	130	95	123,5
20.12.13	–	130	–	–
Итого				323,5

Сумма процентов за весь срок составит $I = \frac{323,5}{4,5} = 71,889$ тыс. грн. Сумма, полученная вкладчиком при закрытии счета, будет:
 $S = 150 + 71,889 = 201,889$ тыс. грн.

Пример 7 На сумму 100 тыс. грн. начисляются 10% годовых. Проценты простые, точные (год не високосный). Определить наращенную сумму в случае, если операция реинвестирования проводится в течение первого квартала и реинвестирование не проводится.

Решение.

Вычислим наращенную сумму при реинвестировании в течение первого квартала:

$$S = 100 \left(1 + 0,1 \cdot \frac{31}{365} \right) \left(1 + 0,1 \cdot \frac{28}{365} \right) \left(1 + 0,1 \cdot \frac{31}{365} \right) = 102,486 \text{ тыс. грн.}$$

Определим наращенную сумму при отсутствии реинвестирования:

$$S = 100 \left(1 + 0,1 \cdot \frac{90}{365} \right) = 102,465 \text{ тыс. грн.}$$

Из результатов вычислений можно сделать вывод, что реинвестирование увеличивает наращенную сумму.

Пример 8 На сумму 100 тыс. грн. начисляются 10% годовых. Проценты простые, точные (год не високосный). Определить наращенную сумму в случае, если операция реинвестирования проводится в течение первого квартала и реинвестирование не проводится.

Решение.

1 способ. Вычислим наращенную сумму при реинвестировании в течение первого квартала:

$$S = 100 \left(1 + 0,1 \cdot \frac{31}{365} \right) \left(1 + 0,1 \cdot \frac{28}{365} \right) \left(1 + 0,1 \cdot \frac{31}{365} \right) = 102,486 \text{ тыс. грн.}$$

Определим наращенную сумму при отсутствии реинвестирования:

$$S = 100 \left(1 + 0,1 \cdot \frac{90}{365} \right) = 102,465 \text{ тыс. грн.}$$

Из результатов вычислений можно сделать вывод, что реинвестирование увеличивает наращенную сумму.

2 способ. На рабочем листе подготовьте исходные данные для расчета и, используя приведенную выше формулу, введите формулы в ячейки Excel, как показано на рис. 2.3.

	A	B	C	D
1	Начальная сумма	Ставка		
2	100000	0,1		
3	Расчет с реинвестированием			Без реинвестирования
4	Месяц	Сумма		Коэффициенты наращенния
5	1	=B\$2*31/365		=B\$2*31/365
6	2	=B\$2*28/365		=B\$2*28/365
7	3	=B\$2*31/365		=B\$2*31/365
8	Итого	=A2*(1+B5)*(1+B6)*(1+B7)		=A2*(1+СУММ(D5:D7))

Рисунок 2.3

Результаты расчетов представлены на рисунке 2.4.

	A	B	C	D
1	Начальная сумма	Ставка		
2	100000	10,00%		
3	Расчет с реинвестированием			Без реинвестирования
4	Месяц	Сумма		Коэффициенты наращенния
5	1	0,008493151		0,008493151
6	2	0,007671233		0,007671233
7	3	0,008493151		0,008493151
8	Итого	102 486,05		102 465,75

Рисунок 2.4

Сумма в конце квартала без реинвестирования составит 102486,05 грн., а в случае реинвестирования – 102465,75.

Пример 9 100 млн. грн. положены 1 января на месячный депозит под 20% годовых. Какова наращенная сумма, если операция повторяется 3 раза?

Решение.

1. Начислим точные проценты (365/365):

$$S = 100 \cdot \left(1 + \frac{31}{365} \cdot 0,2 \right) \cdot \left(1 + \frac{28}{365} \cdot 0,2 \right) \cdot \left(1 + \frac{31}{365} \cdot 0,2 \right) = 105,01 \text{ млн. грн.}$$

2. Обыкновенные проценты (360/360):

$$S = 100 \cdot \left(1 + \frac{30}{360} \cdot 0,2 \right)^3 = 105,084 \text{ млн. грн.}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вклад 100 тыс. грн. был положен в банк 25.05 при ставке 90% годовых. С 1 июля банк снизил ставку до 30% годовых. 15 июля счет был закрыт. Определить сумму начисленных процентов при английской практике начисления.

2. На сумму в 2255\$ в течение 8 месяцев начисляются простые проценты. Базовая ставка 5% годовых повышается каждый месяц, начиная со второго, на 0,5%, временная база $K = 360$. Чему будет равна наращенная сумма? *Ответ: $S = 2356,475\$$*

3. Кредит в размере 200000 грн. выдается на 3,5 года. Ставка процентов за первый год – 30%, а за каждое последующее полугодие она уменьшается на 1%. Определить множитель наращенной суммы и наращенную сумму. *Ответ: $kn = 1.83$; $FV = 165000$*

4. Договор предусматривает следующие ставки простых процентов: за 1 квартал – 230% годовых, за 2-ой и третий – 240% годовых, за четвертый – 200% годовых. Определить множитель наращенной суммы за год. *Ответ: $kn = 4.55$*

5. При открытии счета при ставке 35% годовых 10.01.09 на счет положена сумма 10000 грн. С 01.03.09 ставка процентов по вкладу 30% годовых. 10.03.09 со счета снята сумма 5000 грн. С 15.05.09 ставка процентов по вкладу 20% годовых, 20.05.09 счет закрыт. Найти полученную сумму используя точный способ начисления процентов. *Ответ: 5869,89 грн.*

6. 25 мая открыт счет в сумме 200 тыс. грн. под процентную ставку 20% годовых; 7 июля на счет было внесено 50 тыс. грн.; 10 ноября со счета снята сумма 80 тыс. грн.; а 1 декабря счет был закрыт. Определить сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета, используя схему точных процентов. *Ответ: 193,388 тыс. грн.*

7. Заемщик получил ссуду 3 млн. грн., которую должен погасить одним платежом через 1,5 года. Расчет производится по схеме простых процентов, причем первые 0,75 года годовая ставка равна 13 %, а в оставшееся время годовая ставка равна 17 %. Найти сумму, возвращаемую кредитору.

8. На депозите размещена сумма 10 тыс. грн. Первые 3 месяца начисляются простые проценты по ставке 24 % годовых, далее наращенная сумма реинвестируется на следующие 3 месяца с начислением простых процентов по ставке 36 %. Определить величину вклада на конец 6 месяца.

9. Кредит в размере 20 тыс. грн. выдается на 3,5 года. Ставка процентов за первый год – 15 %, за каждое последующее полугодие она увеличивается на 1%. Определить множитель наращенной суммы и наращенную сумму.

10. 3 марта на счет поступило 3 млн. грн., 5 июля было снято 1,5 млн. грн., 2 сентября поступило 4 млн. грн. Найти сумму на счете на конец года. Ставка – 14 % годовых.

11. Движение средств на счете характеризуется следующими данными: 20.02 поступило 13 тыс. грн., 06.06 снято 6 тыс. грн., 15.09 поступило 2 тыс. грн., 02.10 снято 8 тыс. грн., 18.10 поступило 2 тыс. грн., 12.11 поступило 4 тыс. грн. Найти сумму на счете на конец года. Простая ставка – 16 % годовых.

12. Сумма 2 млн. грн. взята в долг на срок 3 года 9 месяцев с годовой процентной ставкой 10 при условии погашения долга одним платежом в конце срока. Какую сумму нужно будет вернуть кредитору, если расчет производится по схеме простых процентов с поквартальным реинвестированием процентов?