

5 НАЧИСЛЕНИЕ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ

Основные формулы

название	формула	составляющие
наращенная сумма	$S = P(1 + i)^n$	n – число лет, i – процентная ставка, $(1 + i)^n$ – множитель наращенения по сложным процентам
формула наращенения, когда ставка сложных процентов меняется во времени	$S = P \cdot (1 + i_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (1 + i_k)^{n_k}$	i_1, i_2, \dots, i_k – последовательные значения процентных ставок в периодах n_1, n_2, \dots, n_k
начисление процентов при дробном числе лет	$S = P \cdot (1 + i)^a \cdot (1 + bi)$	$n = a + b$ – срок ссуды, a – целое число лет, b – дробная часть года
сравнение роста по сложным и простым процентам	$(1 + ni_{\text{пр}}) > (1 + i_{\text{сл}})^n$	для срока меньше года ($n < 1$)
	$(1 + ni_{\text{пр}}) < (1 + i_{\text{сл}})^n$	для срока больше года ($n > 1$)
	$(1 + ni_{\text{пр}}) = (1 + i_{\text{сл}})^n$	для срока, равного году ($n = 1$)
формулы увеличения ссуды в N раз	$n = \frac{N - 1}{i_{\text{пр}}}$	для простых процентов
	$n = \frac{\ln N}{\ln(1 + i_{\text{сл}})}$	для сложных процентов
формулы удвоения	$n = \frac{1}{i_{\text{пр}}}$	для простых процентов
	$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i_{\text{сл}})}$	для сложных процентов

Примеры решения задач

Пример 1 Какой величины достигнет долг, равный 1 млн. грн., через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5 % годовых?

Решение.

По формуле $S = P(1 + i)^n$ получим

$$S = 1 \cdot (1 + 0,155)^5 = 2,05546422 \text{ млн. грн.}$$

Пример 2 Вычислить наращенную сумму и полученный доход по простым и сложным процентам, если 20 тыс. грн. инвестируются на 3 года под 10% годовых.

Решение.

а) по простым процентам:

$$S = P(1 + ni) = 20 \cdot (1 + 3 \cdot 0,1) = 26 \text{ тыс. грн.},$$

доход $I = 6$ тыс. грн.

б) по сложным процентам:

$$S = P(1 + i)^n = 20 \cdot (1 + 0,1)^3 = 26,62 \text{ тыс. грн.},$$

доход $I = 6,62$ тыс. грн.

Пример 3 Остров Манхэттен, на котором расположена центральная часть Нью-Йорка, был продан за 24 доллара. Стоимость земли этого острова через 350 лет оценивалась примерно в 40 миллиардов долларов, т.е. увеличилась в $1,667 \cdot 10^9$ раз. Такой рост достигается при сложной ставке всего 6,3% годовых.

Пример 4 Ссуда была выдана на 2 года: с 01.05.06 по 01.05.08. Размер ссуды – 10 млн. грн. Ставка 14% годовых (АСТ/АСТ). Необходимо распределить начисленные проценты по календарным годам.

Решение.

За период с 01.05.06 по 31.12.06 (244 дня):

$$I_{06} = 10000 \cdot \left[\left(1 + 0,14\right)^{\frac{244}{365}} - 1 \right] = 915,4 \text{ тыс. грн.}$$

За 2007 год:

$$I_{07} = 10000 \cdot (1 + 0,14)^{\frac{244}{365}} \cdot \left[(1 + 0,14)^1 - 1 \right] = 1528,2 \text{ тыс. грн.}$$

За период с 01.01.08 по 01.05.08 (121 день):

$$I_{08} = 10000 \cdot (1 + 0,14)^{\frac{244}{365}} \cdot \left[\left(1 + 0,14\right)^{\frac{121}{365}} - 1 \right] = 552,4 \text{ тыс. грн.}$$

Таким образом, $I = I_{06} + I_{07} + I_{08} = 2996$ тыс. грн.

Аналогичный результат можно подсчитать для всего срока в целом:

$$I = 10000 \cdot \left[(1 + 0,14)^2 - 1 \right] = 2996 \text{ тыс. грн.}$$

Пример 5 В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 20% годовых плюс маржа 10% в первые два года, 8% в третий год, 5% в четвертый год. Определить величину множителя наращенной за 4 года.

Решение.

$$(1 + 0,3)^2 \cdot (1 + 0,28) \cdot (1 + 0,25) = 2,704.$$

Пример 6 Срок ссуды – 5 лет. Договорная базовая процентная ставка – 12% годовых плюс маржа 0,5% впервые 2 года и 0,75% в оставшиеся годы. Найти множитель наращенения.

$$(1 + 0,12 + 0,005)^2 \cdot (1 + 0,12 + 0,0075)^3 = 1,81407.$$

Пример 7 Кредит в размере 3 млн. грн. выдан на 3 года и 160 дней. Ставка – 16,5% сложных годовых. Найти сумму долга на конец срока.

Решение.

Вычислим срок кредита:

$$n = 3 + \frac{160}{365} = 3,43836 \text{ года.}$$

1. Общий метод (по формуле (3.1)):

$$S = 3000000 \cdot (1 + 0,165)^{3,43836} = 5071935,98 \text{ грн.}$$

2. Смешанный метод:

$$S = 3000000 \cdot (1 + 0,165)^3 \cdot (1 + 0,43836 \cdot 0,165) = 5086595,98 \text{ грн.}$$

Пример 8 Найти сроки удвоения для $i_{\text{пр}} = i_{\text{сл}} = 22,5\%$.

Решение.

$$n = \frac{1}{0,225} = 4,44; \quad n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + 0,225)} = 3,04.$$

Пример 9 Рассчитать, за сколько лет долг увеличится вдвое при ставке простых и сложных процентов равной 10%. Для ставки сложных процентов расчеты выполнить по точной и приближенной формуле. Результаты сравнить.

Решение.

а) При простых процентах: $n = \frac{1}{i_{\text{пр}}} = \frac{1}{0,1} = 10$ лет.

б) При сложных процентах и точной формуле:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i_{\text{сл}})} = \frac{0,693147}{\ln(1 + 0,1)} = \frac{0,693147}{0,09531018} = 7,27 \text{ года.}$$

в) При сложных процентах и приближенной формуле:

$$n = \frac{0,7}{i} = \frac{0,7}{0,1} = 7 \text{ лет.}$$

Таким образом, одинаковое значение ставок простых и сложных процентов приводит к различным результатам, при малых значениях ставки сложных процентов точная и приближенная формулы дают практически одинаковые результаты.

Пример 10 Рассчитать, за сколько лет долг увеличится вдвое при ставке простых и сложных процентов, равной 3 %. Для ставки сложных процентов расчеты выполнить по точной и приближенной формулам. Результаты сравнить.

Решение.

а) При простых процентах: $n = \frac{1}{i_{\text{пр}}} = \frac{1}{0,03} = 33,33$ лет.

б) При сложных процентах и точной формуле:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i_{\text{сл}})} = \frac{0,693147}{\ln(1 + 0,03)} = 23,45 \text{ лет.}$$

в) При сложных процентах и приближенной формуле:

$$n = \frac{0,7}{i} = \frac{0,7}{0,03} = 23,33 \text{ лет.}$$

Таким образом, одинаковое значение ставок простых и сложных процентов приводит к различным результатам, при малых значениях ставки сложных процентов точная и приближенная формулы дают практически одинаковые результаты.

Пример 11 Сумма 100 тыс. грн. положена в банк, который выплачивает сложные проценты по ставке 8% за квартал. Вычислите доход клиента за полтора года.

Решение.

$$S = P(1 + i)^n = 100 \cdot (1 + 0,08)^6 = 158,68743 \text{ тыс. грн.,}$$

доход $I = 58,68743$ тыс. грн.

Пример 12 Банк начисляет сложные проценты по номинальной ставке 10% годовых. На счету 10 тыс. грн. Рассчитайте, какая сумма будет на счету через 2 года, если начисления выполняются: а) ежегодно; б) по полугодиям; в) ежеквартально.

Решение.

а) $S = P(1 + i)^n = 10 \cdot (1 + 0,1)^2 = 12,1$ тыс. грн.;

б) $S = 10 \cdot \left(1 + 0,1 \cdot \frac{1}{2}\right)^4 = 12,15506$ тыс. грн.;

в) $S = 10 \cdot \left(1 + 0,1 \cdot \frac{1}{4}\right)^8 = 12,18403$ тыс. грн..

Задачи для самостоятельной работы

1. Остров Манхэттен был «куплен» в 1624 г. у индейского вождя за 24\$. Стоимость земли этого острова 350 лет спустя оценивалась в 40 млрд. \$.

При какой ставке годовых процентов возможен такой рост? Какая будет при этом простая ставка процентов? *Ответ: 6,25%; 476190,47%*

2. На первоначальную сумму в 580\$ в течение 2,5 лет начисляются проценты по годовой ставке 8,75%. Насколько больше будет наращенная сумма, вычисленная по смешанному методу, чем по общему методу, если $K = 360$? *Ответ: 0,63\$*

3. Определить сумму платежа по векселю в момент его погашения через 9 месяцев, если при его учете по номинальной учетной ставке 30% годовых с ежеквартальным дисконтированием владелец получил ссуду 800 д.е. *Ответ: 1061,61 д.е.*

4. Некто имеет 900 \$. Что для него выгоднее, положить эту сумму в банк на год под 8 % годовых или купить за 900 \$ вексель с номиналом 950 \$ и погашением через год? Чему равна доходность покупки векселя, измеренная в виде годовой ставки процентов? *Ответ: Выгоднее депозит; 5,56%*

5. На сколько бы возросла стоимость одного пфенинга (немецкая разменная монета достоинством в 1/100 марки, имевшая хождение до введения евро), заложенного в конце 30-летней войны (1648) к концу 1992 года (процентная ставка 5%). Просчитайте конечную стоимость также и при простом начислении процентов. *Ответ: 194589,2661 DM; 1,72 DM*

6. Определить время увеличения первоначального капитала в четыре раза, если начисление процентов будет выполняться ежемесячно при номинальной ставке 36% годовых. При необходимости выполнить коррекцию наращенного капитала так, чтобы время было с целым количеством месяцев. *Ответ: 3,908 года; $S = P = 4,13252$*

7. На первоначальную сумму в течение 5 лет начисляются сложные годовые проценты по ставке 12 % раз в конце года. Во сколько раз вырастет наращенная сумма, если проценты будут начисляться ежемесячно? *Ответ: в 1,03 раза*

8. Определить срок платежа по векселю на сумму 1000 д.е., если при его учете по номинальной учетной ставке 48% годовых с ежемесячным дисконтированием владелец получил ссуду 900 д.е. При необходимости выполнить коррекцию так, чтобы срок был с целым количеством дней (из расчета 360 дней в году). *Ответ: 0,214 года; округлив до 77 дней, $P = 900,71$ д.е.*

9. Срок до погашения векселя равен двум годам. Дисконт при его учете составил 30%. Какой сложной годовой учетной ставке соответствует этот дисконт? *Ответ: 16,334%*

10. В кредитном договоре на сумму 1 млн. грн. и сроком на 4 года зафиксирована ставка сложных процентов, равная 20 % годовых. Рассчитать наращенную сумму.

11. Депозит рассчитывается по схеме сложных процентов с годовой ставкой 10 %. За какое время первоначальная сумма увеличится в 5 раз?

12. Какой величины достигнет долг, равный 6 тыс. грн., через 4 года при росте по сложной ставке наращения 18,5 % годовых?

13. Какой величины достигнет долг, равный 8 тыс. грн., через 4.6 года при росте по сложной ставке наращивания 20 % годовых? Рассчитать непосредственно и по смешанной схеме.

14. Какой величины достигнет долг, равный 15 тыс. грн., через 5.7 года при росте по сложной ставке наращивания 20 % годовых?

15. Кредит в сумме 2500\$ выдан на 8 лет. Сложная ставка годовых процентов менялась от периода к периоду: на протяжении первых 3-х лет действовала ставка 7,5%, в следующие 3 года – 8%, в последнем периоде – 8,2%. Какую сумму нужно вернуть в конце восьмого года? Чему равна средняя ставка сложных процентов? *Ответ: 4580,27\$; 7,86%.*

16. Определите число лет, за которые первоначальная сумма увеличится в 3 раза при годовой ставке 5%.

17. По договору предусматривается возмещение долга 200 тыс. грн. через 2 года. Какова ставка сложных процентов, если первоначальная сумма долга составляет 100 тыс. грн.?

18. В долг на 3 года получены 100 тыс. грн. Определить сумму, подлежащую выплате через 3 года, при сложной ставке 15 % годовых.

19. Первоначальная сумма долга равняется 25 тыс. грн. Определить величину наращенной суммы через 3 года при применении декурсивного и антисипативного способов начисления процентов. Годовая ставка – 18 %.

20. Какой величины достигнет долг, равный 1 млн грн., через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5 % годовых?

21. Годовая ставка сложных процентов равна 8 %. Через сколько лет начальная сумма удвоится?

22. На сберегательном счете в банке лежат 200 грн. Какая сумма будет находиться на данном счете через три года, если в расчетах используется сложная ставка 12 % годовых?

23. Сколько лет необходимо для увеличения начальной суммы в 3 раза, если применяется сложная ставка 10 % годовых?

24. За сколько лет первоначальная сумма увеличится в 4 раза, если в расчетах используется сложная ставка 20 % годовых?

25. По какой ставке сложных процентов следует разместить денежные средства на депозите, чтобы через 3 года начальная сумма возросла в 6 раз?

26. Какой величины достигнет долг 10 млн. грн. через 5 лет при росте по сложной ставке 15 % годовых?