

6 НАРАЩЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ m РАЗ В ГОДУ. НОМИНАЛЬНАЯ И ЭФФЕКТИВНАЯ СТАВКИ

Основные формулы

название	формула	составляющие
формула нараще- ния процентов m раз в году	$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}$	j – номинальная ставка (ставка сложных процентов, начисляемая m раз в году); m – число периодов начисления в году
	$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{N}{\tau}}$	$\frac{N}{\tau}$ – число периодов начисления процентов; τ – период начисления процентов
	$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^a \left(1 + b \frac{j}{m}\right)$	a – целое число периодов начисления, т.е. $a = \left[\frac{N}{\tau}\right]$ – целая часть от деления всего срока ссуды N на период начисления τ ; b – оставшаяся дробная часть периода начисления ($b = \frac{N}{\tau} - a$)
<i>номинальная и эффективная ставки</i>		
название	формула	составляющие
эффективная процентная ставка (годовая ставка сложных процентов, которая даёт тот же результат, что и начисление по номинальной ставке m раз в год)	$i_{\text{эф}} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$	j – номинальная ставка (ставка сложных процентов, начисляемая m раз в году)
номинальная ставка через эффективную	$j = m \left(\sqrt[m]{1 + i} - 1\right)$	
эффективная учетная ставка (характеризует результат дисконтирования за год и находится путём приравнивания множителей дисконтирования по годовой учётной ставке и по номинальной учётной ставке m раз в год)	$d_{\text{эф}} = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m$	f – номинальная годовая учетная ставка
номинальная учетная ставка	$f = m \cdot \left(1 - \sqrt[m]{1 - d}\right)$	

эквивалентная замена номинальной ставки	$j_2^{(m_2)} = m_2 \left(\left(1 + \frac{j_1^{(m_1)}}{m_1} \right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1 \right)$	$j^{(m)}$ – размер номинальной ставки и число начислений за год; m_2 – значение новой ставки
---	---	---

Примеры решения задач

Пример 1 Какой величины достигнет долг, равный 1 млн. грн., через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5% годовых, при этом проценты начисляются не один раз в году, а поквартально?

Решение.

По формуле (3.12) получим

$$S = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{0,155}{4} \right)^{20} = 2139049,01 \text{ грн.}$$

А при ежегодном начислении процентов мы получим

$$S = 1000000 \cdot (1 + 0,155)^5 = 2055464,22 \text{ грн.}$$

Пример 2 Какова сумма долга через 25 месяцев, если его первоначальная величина 500 тыс. грн., проценты сложные, ставка 20% годовых, начисление поквартальное?

Решение.

По условиям задачи число периодов наращения $N = 25 : 3 = 8\frac{1}{3}$. Применим два метода наращения: общий и смешанный.

1. Общий метод:

$$S = 500000 \cdot \left(1 + \frac{0,2}{4} \right)^{8\frac{1}{3}} = 750840,04 \text{ грн.}$$

2. Смешанный метод:

$$S = 500000 \cdot \left(1 + \frac{0,2}{4} \right)^8 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{0,2}{4} \right) = 751039,85 \text{ грн.}$$

Пример 3 Размер ссуды, предоставленной на 28 месяцев, равен 20 млн. ден. ед. Номинальная ставка равна 60% годовых; начисление процентов ежеквартальное. Вычислить наращенную сумму в трех ситуациях:

- на дробную часть начисляются сложные проценты;
- на дробную часть начисляются простые проценты;
- дробная часть не учитывается.

Результаты расчетов сравнить.

Решение.

Всего $N = 28 : 3 = 9\frac{1}{3}$ периодов начисления, т.е. 9 кварталов и 1 месяц:

$$1) S = 20 \cdot \left(1 + \frac{0,6}{4}\right)^{9 \cdot \frac{1}{3}} = 73,713 \text{ млн. ден. ед.};$$

$$2) S = 20 \cdot \left(1 + \frac{0,6}{4}\right)^9 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{0,6}{4}\right) = 73,875 \text{ млн. ден. ед.};$$

$$3) S = 20 \cdot \left(1 + \frac{0,6}{4}\right)^9 = 70,358 \text{ млн. ден. ед.}$$

Из полученных результатов расчета следует, что наибольшего значения наращенная сумма достигает во втором случае, т.е. при начислении на дробную часть простых процентов. Таким образом, для ссудодателя выгоднее второй вариант, так как итоговая сумма получается максимальной, а для заемщика предпочтительнее третий вариант, так как итоговая сумма минимальна.

Пример 4 Найти размер эффективной ставки, если номинальная ставка равна 25% при ежемесячном начислении процентов.

Решение.

$$i_{\text{эф}} = \left(1 + \frac{0,25}{12}\right)^{12} - 1 = 0,280732.$$

Для участвующих в сделке сторон безразлично, применить ставку 25 % при ежемесячном начислении процентов или годовую (эффективную) ставку 28,0732 %.

Пример 5 Определить номинальную ставку $j^{(4)}$, которая безубыточно заменяет ставку $j^{(12)} = 25\%$ в примере 4.

Решение.

$$j^{(4)} = 4 \cdot \left[\left(1 + \frac{0,25}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1 \right] = 0,25524.$$

Таким образом, сокращение количества начислений потребует увеличения ставки с 25% до 25,524 %.

Пример 6 Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки 10% годовых.

Решение.

$$i_{\text{эф}} = \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^4 - 1 = 0,1038, \text{ т.е. } 10,38\%.$$

Пример 7 Определить какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 12% годовых.

Решение.

$$j = 4\left(\sqrt[4]{1 + 0,12} - 1\right) = 0,11495, \text{ т.е. } 11,495\%.$$

Пример 8 Годовая эффективная процентная ставка составляет 45%. вычислить квартальную эффективную процентную ставку и соответствующую номинальную.

Решение.

Вычислим квартальную эффективную ставку:

$$i_{кв} = \sqrt[4]{1 + i} - 1 = \sqrt[4]{1 + 0,45} - 1 = 0,097 \text{ или } 9,7\%.$$

Номинальная ставка при начислении по кварталам

$$j = m\left(\sqrt[4]{1 + i} - 1\right) = 4 \cdot 0,097 = 0,388 \text{ или } 38,8\%.$$

Пример 9 Определить номинальную ставку с начислением по полугодиям, которая эквивалентна ставке 24% с ежемесячным начислением.

Решение.

Вычислим годовую эффективную ставку:

$$i_{эф} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{12} - 1 = 0,268.$$

Номинальная ставка будет

$$j = m \cdot \left(\sqrt[2]{1 + i} - 1\right) = 2 \cdot \left(\sqrt{1 + 0,268} - 1\right) = 0,25 \text{ или } 25\%.$$

Пример 10 Финансовая компания установила ежедневное увеличение вкладов 5 грн. На каждую тысячу. Определить эффективную годовую ставку процентов при заключении договора с компанией на 3 месяца, на полгода и на год. (год не високосный)

Решение.

Годовая эффективная ставка: $i_{эф} = (1 + 0,005)^{365} - 1 = 5,17$ или 517%.

Годовая ставка при заключении договора на 3 месяца, эквивалентная $i_{эф} = 5,17$:

$$j^{(4)} = 4\left(\sqrt[4]{1 + 5,17} - 1\right) = 4\left(\sqrt[4]{6,17} - 1\right) = 4 \cdot 0,575 = 2,30 \text{ или } 230\%.$$

Годовая ставка при заключении договора на полгода, эквивалентная $i_{эф} = 5,17$:

$$j^{(2)} = 2\left(\sqrt{1 + 5,17} - 1\right) = 2\left(\sqrt{6,17} - 1\right) = 2 \cdot 1,484 = 2,97 \text{ или } 297\%.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Проверьте следующую информацию инвестиционной компании: она утверждает что, капитал компании удваивается за 7,5 лет при 9,25 % (номинальных) и полугодовой выплате процентов. *Ответ: увеличивается в 1,97 раза*

2. Первоначальная сумма капитала на 01.01.08 составляет 1000 д.е. Каков будет капитал на 01.01.2010, если начисление процентов будет выполняться поквартально при номинальной ставке 24% годовых? Определить эффективную ставку процентов. *Ответ: 2012,196 д.е.; 26,25%*

3. Запас древесины лесного массива в данный момент, оценивается в 1 млн. м³. Каков будет запас древесины через 50 лет при годовой силе роста 10%? *Ответ: 148, 41 млн. м³.*

4. Кредит выдан на 5 лет под 8% годовых, начисление процентов в конце года. Какую номинальную годовую ставку процентов необходимо назначить, чтобы получить к концу пятого года ту же наращенную сумму при поквартальном начислении процентов? Будет ли зависеть эта номинальная ставка от срока ссуды? *Ответ: 7,77%; нет*

5. Планируется поместить на 3 месячный депозит 2000\$ на гривневый либо валютный вклад. В начале депозитной операции обменный пункт продавал 1\$ за 16 грн., а скупал по 15 грн. Годовые процентные ставки по 3-х месячным депозитам составляли 22% по гривневым вкладам и 15% по валютным. Какая форма помещения денежных средств предпочтительнее, если ожидается, что за 3 месяца курс покупки 1\$ в обменном пункте возрастет на: а) 13,8%, б) 41,88%? *Ответ: а) Выгоднее двойная конверсия; б) выгоднее валютный депозит.*

6. Свободные денежные средства в сумме 300 тыс. грн. планируется поместить на трехмесячный депозит. В данный момент обменный пункт покупает 100 долларов по 1250 грн., а продает по 2165 грн. Ставка процентов по трехмесячным депозитам составляет: 14% годовых по гривневым вкладам и 3% годовых по долларовым. Что выгоднее, использовать гривневый депозит или долларовый с двойной конверсией валюты, если предполагается, что курс покупки долларов за 3 месяца вырастает на 4%? Чему будет равна потеря при неправильной тактике вложения денежных средств? *Ответ: выгоднее двойная конверсия; потеря составит 1667,96 грн.*

7. Определить эффективную учётную ставку и сумму дисконта, если известно, что финансовый инструмент на сумму 5 млн. грн., срок платежа по которому наступает через пять лет, продан с дисконтом при поквартальном дисконтировании по номинальной учётной ставке 15%.

8. При учёте векселя на сумму 2500 грн., до срока оплаты которого осталось 30 дней, банк выплатил предъявителю 2000 грн. Определить величину сложной учётной ставки банка, если дисконтирование ежеквартальное, а также доходность операции в виде эффективной ставки.

9. Сравните величины дохода, если на сумму 20 тыс. грн., инвестированную на 3 года, начисляются сложные проценты по ставке 9% годовых: а) ежегодно; б) по полугодиям; в) ежеквартально; г) ежемесячно.

10. Годовая эффективная процентная ставка составляет 25%. Вычислите полугодовую эффективную ставку и соответствующую номинальную.

11. Вычислите эффективную годовую ставку сложных процентов, если номинальная ставка составляет 12% годовых, а проценты начисляются: а) по полугодиям; б) ежеквартально; в) ежемесячно.

12. Финансовая компания обещает, что вложенная сумма удвоится за квартал. Определите эффективную годовую ставку процентов при вложении средств на полгода, 9 месяцев и год.

13. Какая сумма должна быть инвестирована сегодня для накопления 100 тыс. грн. через 3 года при начислении сложных процентов по номинальным ставкам: а) 25% в конце каждого полугодия; б) 50% в конце каждого года.

14. Определить эффективную учётную ставку и сумму дисконта, если известно, что финансовый инструмент на сумму 5 млн. грн., срок платежа по которому наступает через пять лет, продан с дисконтом при поквартальном дисконтировании по номинальной учётной ставке 15%.

15. Какой величины достигнет долг, равный 8 тыс. грн., через 4,6 года при росте по сложной ставке наращивания 20 % годовых?

16. Кредит в размере 3 млн грн. выдан на 2 года и 160 дней под 16,5 % сложных годовых. Определить сумму долга на конец периода смешанным методом.

17. Клиент внес в банк 2,5 тыс. грн. под 9,5 % годовых. Через 2 года и 270 дней он изъясил вклад. Определить полученную им сумму при использовании банком сложных процентов и смешанного метода.

18. Какой величины достигнет сумма 400 тыс. грн. на депозите через 2 года, если эта сумма размещена по сложной ставке 15 % при поквартальном начислении?

19. Заемщик получил ссуду 3 млн грн., которую должен погасить одним платежом через 1,5 года. Расчет производится по схеме сложных процентов, причем первые 0,75 года годовая ставка равна 13 %, а в оставшееся время годовая ставка – 17 %. Найти сумму, возвращаемую кредитору.

20. Кредит 500 тыс. грн. выдан на 2 года и 154 дня под 18 % сложных годовых. Какой будет сумма долга на конец года? Произвести расчеты двумя способами.

21. Какой величины достигнет долг, равный 4,5 млн. грн., через 6 лет при росте по сложной ставке 18 % годовых с начислением процентов: а) ежемесячно; б) поквартально?

22. Какая сумма больше: 1700 грн. сейчас или 1970 грн. через 1,5 года, если для расчетов применяется:

- а) простая процентная ставка 10 %;
- б) сложная процентная ставка 10 %;
- в) простая учетная ставка 10 %;
- г) сложная учетная ставка 10%?

23. Депозит в размере 50 тыс. грн. внесен в банк на 3 года, под 10 % годовых (сложные проценты); начисление процентов производится ежеквартально. Определить наращенную сумму.

24. На сумму 60 тыс. грн. ежеквартально по ставке 12 % годовых начисляются сложные проценты в течение 14 месяцев. Определить величину наращенной суммы смешанным методом.

25. Определить эффективную процентную ставку сложных процентов с тем, чтобы получить такую же наращенную сумму через 2 года, как и при использовании номинальной ставки 8 % при полугодовом начислении процентов.

26. Рассчитать эффективные процентные ставки при ежегодном, полугодовом, ежеквартальном начислении процентов, если номинальная ставка составляет 5 %.

27. Рассчитать эффективную ставку сложных процентов, если номинальная ставка равна 14 % и начисление процентов происходит ежемесячно.

28. Облигация достоинством 10 тыс. грн. выпущена на 5 лет при номинальной ставке 5 %. Рассчитать эффективную процентную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в месяц.

29. Облигация достоинством 20 тыс. грн. выпущена на 6 лет при номинальной ставке 5 %. Рассчитать эффективную процентную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в полугодие.

30. Облигация достоинством 5 тыс. грн. выпущена на 2 года при номинальной ставке 5 %. Рассчитать эффективную процентную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в квартал.

31. Облигация номиналом 15 тыс. грн. выпущена на 4 года при номинальной ставке 6 %. Рассчитать эффективную учетную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в месяц.

32. Облигация номиналом 20 тыс. грн. выпущена на 5 лет при номинальной ставке 6 %. Рассчитать эффективную учетную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в полугодие.

33. Облигация номиналом 10 тыс. грн. выпущена на 3 года при номинальной ставке 6 %. Рассчитать эффективную учетную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в квартал.

34. Рассчитать эффективные учетные ставки при ежегодном, полугодовом, ежеквартальном начислении процентов, если номинальная ставка составляет 4 %.

35. Чему равна эффективная ставка, если номинальная ставка составляет 20 % годовых при поквартальном начислении процентов?

36. Определить годовую номинальную ставку при ежеквартальном начислении процентов, если эффективная ставка равна 30 %.

37. В банк положена сумма 50 тыс. грн. сроком на 1 год по годовой ставке 16 %. Найти наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную ставку для ежемесячного начисления процентов.

38. В банк положена сумма 40 тыс. грн. сроком на 1 год по ставке 15 % годовых. Найти наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную ставку для ежеквартального начисления процентов.

39. В банк положена сумма 30 тыс. грн. сроком на 1 год по ставке 14 % годовых. Найти наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную ставку для полугодового начисления процентов.

40. Эффективная ставка при полугодовом начислении процентов составила 16 %. Найти годовую номинальную процентную ставку.

41. Эффективная ставка при полугодовом начислении процентов составила 18 %. Найти годовую номинальную учетную ставку.

42. Определить эффективную учетную ставку сложных процентов с тем, чтобы получить такую же наращенную сумму через два года, как и при использовании номинальной ставки 18 % при ежеквартальном начислении процентов.

43. Каким должен быть размер эффективной ставки, если номинальная ставка равна 30 % при поквартальном начислении процентов?

44. В кредитном договоре на сумму 250 тыс. грн. и сроком на 4 года зафиксирована ставка сложных процентов, равная 20 % годовых на первую половину срока, 18 % годовых на последующие 1,5 года и далее 17,7 % годовых. Рассчитать наращенную сумму.

45. Какой величины достигнет долг, равный 15 тыс. грн., через 5,7 года при росте по сложной ставке 16,5 % годовых при начислении процентов: а) раз в году; б) раз в месяц.

46. Ссуда 20 млн грн. предоставлена на 28 месяцев. Проценты сложные, ставка – 60 % годовых. Проценты начисляются ежеквартально. Вычислить наращенную сумму.

47. Ссуда размером 2 млн грн. предоставлена на 4 года под 40 % годовых. Проценты начисляются ежеквартально и капитализируются. Вычислить наращенную сумму.

48. Рассчитать эффективные процентные ставки при ежегодном, полугодовом, ежеквартальном начислении процентов, если номинальная ставка составляет 5 %.

49. Рассчитать эффективную ставку сложных процентов, если номинальная ставка равна 14 % и начисление процентов происходит ежемесячно.

50. Облигация достоинством 10 тыс. грн. выпущена на 5 лет при номинальной ставке 5 %. Рассчитать эффективную процентную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в месяц.

51. Облигация достоинством 20 тыс. грн. выпущена на 6 лет при номинальной ставке 5 %. Рассчитать эффективную процентную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в полугодие.

52. Облигация достоинством 5 тыс. грн. выпущена на 2 года при номинальной ставке 5 %. Рассчитать эффективную процентную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в квартал.

53. Годовая процентная ставка начисления сложных процентов за кредит установлена на уровне 0,08 с надбавкой 0,5 % от суммы ссуды в первые два года и 0,8 % в следующие два. Определить величину множителя наращенного к концу срока кредита.

54. Какой величины достигнет долг, равный 19400 грн., через 3 года при условии, что в первый год ставка составляет 13 %, во второй – 11,5 %, в третий – 8,6 %?

55. Определить, какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 12 % годовых.

56. Каков размер эффективной ставки, если номинальная ставка равна 25% при ежемесячном начислении процентов?

57. Эффективная процентная ставка равна 0,06. Определить номинальную процентную ставку при начислении сложных процентов за 6 периодов в году.