

9 НЕПРЕРЫВНОЕ НАРАЩЕНИЕ И ДИСКОНТИРОВАНИЕ. НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Основные формулы

| название | формула | составляющие |
|---|--|--|
| наращенная сумма при дискретных процентах | $S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}$ | j – номинальная ставка процентов; m – число периодов начисления процентов в году |
| наращенная сумма в случае непрерывного начисления процентов по ставке j | $S = Pe^{nj} = Pe^{\delta n}$ | δ – сила роста, при $m \rightarrow \infty$ представляет собой номинальную ставку процентов |
| дисконтирование на основе непрерывных процентных ставок | $P = Se^{-\delta n}$ | |
| связь дискретных и непрерывных процентных ставок | $\delta = \ln(1 + i)$ | |
| | $i = e^{\delta} - 1$ | |
| наращенная сумма | $S = Pe^{\int_0^n \delta_t dt}$ | $\delta_t = f(t)$ – сила роста изменяется во времени, следуя некоторому закону, представленному в виде непрерывной функции времени |
| современная величина | $P = Se^{-\int_0^n \delta_t dt}$ | |
| линейная функция силы роста | $\delta_t = \delta + at$ | δ – начальное значение силы роста; a – прирост силы роста в единицу времени |
| множитель наращенной суммы для линейной функции силы роста | $q = e^{\delta n + \frac{an^2}{2}}$ | |
| экспоненциальная функция силы роста | $\delta_t = \delta a^t$ | |
| множитель наращенной суммы для экспоненциальной функции силы роста | $q = e^{\frac{\delta}{\ln a} \cdot (a^n - 1)}$ | |
| срок ссуды при наращении по постоянной силе роста | $n = \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\delta}$ | |

| название | формула | составляющие |
|---|--|--------------|
| срок ссуды при наращении с изменяющейся силой роста (с постоянным темпом роста a) | $n = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln \left[1 + \frac{\ln a \cdot \ln \left(\frac{S}{P} \right)}{\delta} \right]$ | |
| процентная ставка при наращении по постоянной силе роста | $\delta = \frac{\ln \left(\frac{S}{P} \right)}{n}$ | |
| процентная ставка при наращении с изменяющейся силой роста (с постоянным темпом роста a) | $\delta = \frac{\ln a \cdot \ln \left(\frac{S}{P} \right)}{a^n - 1}$ | |

Примеры решения задач

Пример 1 Сумма, на которую начисляются непрерывные проценты, равна 2 млн. грн., сила роста 10%, срок 5 лет. Определить наращенную сумму.

Решение.

Наращенная сумма, согласно формуле $S = Pe^{nj} = Pe^{\delta n}$, составит

$$S = Pe^{\delta n} = 2 \cdot e^{0,1 \cdot 5} = 3,29774425 \text{ млн. грн.}$$

Пример 2 Определить современную стоимость платежа из примера 18 при условии, что дисконтирование производится по силе роста 12% и по дискретной сложной учетной ставке такого же размера.

Решение.

Получим в тыс. грн.:

$$P = 5000 \cdot e^{-0,12 \cdot 5} = 2744, \quad S = 5000 \cdot (1 - 0,12)^5 = 2639.$$

Пример 3 Используя условие примера 26 и рассмотренную выше теорию, получим, что непрерывное наращение по ставке 10% равнозначно наращению за тот же срок дискретных сложных процентов по годовой ставке. Находим

$$i = e^{0,1} - 1 = 0,10517.$$

В итоге получим

$$S = 2 \cdot (1 + 0,10517)^5 = 3,29774425 \text{ млн. грн.}$$

Пример 4 Годовая ставка сложных процентов равна 15%, чему равна эквивалентная сила роста.

Решение.

Воспользуемся формулой $\delta = \ln(1 + i)$

$$\delta = \ln(1 + i) = \ln(1 + 0,15) = 0,13976,$$

т.е. эквивалентная сила роста равна 13,976%.

Пример 5 Пусть начальное значение силы роста равно 8%, процентная ставка непрерывно и линейно изменяется, прирост за год составляет 2% ($a = 0,02$). Срок наращивания 5 лет. Найти множитель наращивания. Рассмотреть случай, когда сила роста линейно уменьшается, т.е. $a = -0,02$.

Решение.

Для расчета множителя наращивания воспользуемся формулой $q = e^{\delta n + \frac{an^2}{2}}$:

$$q = e^{\delta n + \frac{an^2}{2}} = e^{0,08 \cdot 5 + \frac{0,02 \cdot 5^2}{2}} = e^{0,65} = 1,91554.$$

В случае, когда сила роста линейно уменьшается, т.е. $a = -0,02$, будем иметь

$$q = e^{\delta n + \frac{an^2}{2}} = e^{0,08 \cdot 5 - \frac{0,02 \cdot 5^2}{2}} = e^{0,15} = 1,16183.$$

Пример 6 Пусть начальное значение силы роста равно 8%, процентная ставка непрерывно и экспоненциально увеличивается, прирост за год составляет 20% ($a = 1,2$). Срок наращивания 5 лет. Найти множитель наращивания.

Решение.

Для расчета множителя наращивания воспользуемся формулой $q = e^{\frac{\delta}{\ln a} \cdot (a^n - 1)}$:

$$q = e^{\frac{\delta}{\ln a} \cdot (a^n - 1)} = e^{\frac{0,08}{\ln 1,2} \cdot (1,2^5 - 1)} = e^{0,65305} = 1,92139.$$

Пример 7 Ставка непрерывного дисконтирования равна 7,5%. Какую сумму нужно положить на счет, чтобы через 3 года получить 50 тыс. грн.?

Решение.

По условию $\delta = 0,075$. Используя формулу $P = Se^{-\delta n}$, получим:

$$P = 50000 \cdot e^{-0,075 \cdot 3} = 50000 \cdot e^{-0,225} = 50000 \cdot 0,802 = 40100 \text{ грн.}$$

Пример 8 Выбрать наиболее выгодный вариант вложения денег, вычислив эффективные годовые ставки, если банк предлагает варианты: а) 12% годовых; б) 3% – ежеквартальное начисление; в) 6% – по полугодиям; г) непрерывное начисление процентов с интенсивностью 12%.

Решение.

а) 12% годовых при начислении за год является эффективной ставкой;

б) при 3% за каждый квартал получим:

$$i = (1 + 0,03)^4 - 1 = 1,1257 - 1 = 0,1257 \text{ или } 12,57\%.$$

в) при 6% за полугодие получим:

$$i = (1 + 0,06)^2 - 1 = 1,1236 - 1 = 0,1236 \text{ или } 12,36\%.$$

г) если $\delta = 0,075$, то по формуле $i = e^\delta - 1$ получим:

$$i = e^{0,12} - 1 = 1,1275 - 1 = 0,1275 \text{ или } 12,75\%.$$

Таким образом, наиболее выгодный вариант – непрерывное начисление процентов.

Пример 9 Банк начисляет непрерывные проценты по вкладам, причем за 1-й год ставка равна 9%, а за каждый следующий год хранения вклада ставка увеличивается на 1%. На сколько процентов увеличится первоначальная сумма за 3 года и при какой годовой ставке сложных процентов можно достичь такого же финансового результата?

Решение.

За три года:

$$S = P \cdot e^{0,09} \cdot e^{0,10} \cdot e^{0,11} = P \cdot e^{0,30};$$

$$e^{0,30} = 1,3499; \quad i = 1,3499 - 1 = 0,3499,$$

т.е. за три года первоначальная сумма увеличится на 34,99%.

Определим теперь годовую ставку:

$$(1 + i)^3 = 1,3499 \Rightarrow i = \sqrt[3]{1,3499} - 1 = 0,105 \text{ или } 10,5\%.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. На сумму 15 тыс. грн. начисляются проценты по сложной годовой ставке 22 % в течение 3,5 лет. Определить силу роста и наращенную сумму при дискретном и непрерывном начислении.

2. Вклад, на который в течение 2 лет непрерывно начислялись сложные проценты по силе роста d , а в последующие 4 года по силе роста $2d$, удвоился. Найди величину силы роста d .

3. На первоначальный вклад 2000 д.е. в течение 3 лет непрерывно начисляли сложные проценты по силе роста 0,06. Затем еще в течение 4 лет – по силе роста 0,08. Найти величину вклада через 7 лет.

4. Определить множитель наращения при непрерывном начислении процентов в течение пяти лет, если начальная сила роста равнялась 10%, а ежегодный прирост составлял 3%. *Ответ: 2,39888*

5. Определить время увеличения первоначального капитала в два раза, если начисление процентов будет выполняться по непрерывной ставке 12% годовых. При необходимости выполнить коррекцию наращенного капитала так, чтобы срок операции был реальным, например, с ближайшим целым количеством: а) полугодий, б) дней (из расчета 360 дней в году). *Ответ: 5,7762 лет; а) если $n = 6$, то $S = P = 2,0544$; б) если $t = 2079$ дней, то $S = P = 1,9997$.*

6. Через 4 года долг с учетом процентных денег достиг 100 тыс. грн. Годовая процентная ставка – 15 %. Сколько денег было взято в долг, если начислялись проценты: а) простые, б) сложные, в) непрерывные проценты?

7. За какой срок сумма 22 тыс. грн. достигнет 50 тыс. грн. при непрерывном начислении процентов? Сила роста во времени изменяется по линейному закону, начальное значение силы роста 0,12, а прирост силы роста 0,1.

8. Определить начальное значение силы роста при ее линейном изменении во времени, если долг за 2,5 года увеличится с 8 тыс. грн. до 15 тыс. грн. при приросте силы роста 0,1.

9. Какая непрерывная ставка заменит поквартальное начисление процентов по номинальной ставке 20 %?

10. На сумму 15 тыс. грн. начисляются проценты по сложной годовой ставке 22 % в течение 3,5 лет. Определить силу роста и наращенную сумму при дискретном и непрерывном начислении.

11. Определить современную стоимость суммы 25 тыс. грн., выплаченной через 2,8 года, при линейном изменении силы роста 0,12 и приросте силы роста 0,1.

12. Сумма 2 млн. грн. взята в долг на срок 4,8 года с годовой ставкой 10% при условии погашения долга одним платежом в конце срока. Какую сумму нужно будет возратить кредитору, если расчет производится по:

- а) по схеме простых процентов;
- б) по схеме сложных процентов;
- в) по смешанной схеме;
- г) по схеме непрерывных процентов?

13. За 8 лет первоначальная сумма вклада выросла в 5 раз. Найти годовую процентную ставку, если при расчете используется схема: а) простых, б) сложных, в) непрерывных процентов.

14. Скорость роста банковского вклада прямо пропорциональна размеру вклада с коэффициентом пропорциональности 0,02. Найти сумму на счете через 4 года, если первоначальная сумма вклада составляет 10 тыс. грн.

15. Банк выдает ссуду на 5 лет под 10% сложных годовых. Какую ставку непрерывных процентов должен установить банк, чтобы полученный им доход не изменился?

16. Непрерывные проценты начисляются на сумму 25 тыс. грн. с интенсивностью 6% в течение 3 лет. Вычислить наращенную сумму.

17. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ставке 5% за квартал. Какую ставку непрерывных процентов должен установить банк, чтобы доходы клиентов не изменились?

18. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий непрерывные проценты по ставке 5%, чтобы через 5 лет получить 35 тыс. грн.?

19. Банк предлагает различные варианты начисления сложных процентов: а) 8% годовых; б) 4% – за полугодие; в) 2% – ежеквартальное начисление; г) непрерывное начисление по ставке 8%. Какой вариант следует выбрать клиенту?

20. Клиент вложил в банк 10 тыс. грн. Какая сумма будет на счете этого клиента через 1 год и через 10 лет, если банк будет начислять: а) 8% простых годовых; б) 8% сложных годовых; в) 8% годовых с начислением по полугодиям; г) 8% годовых с начислением по кварталам; д) 8% – ставка непрерывных процентов?

21. По договору банк начисляет непрерывные проценты: за первый год хранения вклада предлагается ставка 7%, а за каждый следующий год ставка

увеличивается на 2%. Определить множитель наращенения за 3 года и при какой годовой ставке сложных процентов можно достичь такого же финансового результата?

22. Гражданин Н. желает получить 35 тыс. грн., инвестируя 20 тыс. грн. на 1 год под непрерывные проценты. Определить ставку непрерывных процентов и доход, который он может получить через полгода.

23. Интенсивность процентов непрерывно и линейно изменяется. Определить коэффициент наращенения и величину дохода от инвестиции 100 тыс. грн. сроком на 5 лет, если начальное значение непрерывной ставки 10% и годовой прирост составляет 1,5%?

24. Гражданин Н. положил в банк некоторую сумму. Через 2 года он положил на свой счет такую же сумму, а еще через 1 год 6 месяцев – снова такую же сумму. Через 2 года 6 месяцев после этого на его счете было 25 тыс. грн. Какую сумму вносил гражданин Н., если банк выплачивает непрерывные проценты с силой роста 5%?