

12 ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

Основные формулы

название	формула	составляющие
наращенная сумма постоянной финансовой ренты постнумерандо при условии, что рента выплачивается один раз в году, а проценты начисляются один раз в конце года	$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = R s_{n;i}$	$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ – коэффициент наращивания ренты; n – срок ренты; i – уровень процентной ставки
наращенная сумма ренты, если платежи делают один раз в конце года, а проценты начисляют m раз в году	$S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}$	j – номинальная ставка процентов
наращенная сумма при условии, что число платежей один раз в году и число начислений процентов $m \rightarrow \infty$	$S = R \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1} = R s_{n; \delta}$	
наращенная сумма при условии, что рента выплачивается p раз в году равными платежами, а проценты начисляются один раз в конце года	$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{\frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}} - 1} = R s_{n;i}^{(p)}$	$s_{n;i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p \left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 \right]}$ – коэффициент наращивания p -срочной ренты
наращенная сумма при условии, что число платежей p в году и число начислений процентов m совпадают	$S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{j} = R s_{mn; \frac{j}{m}}$	
наращенная сумма в общем случае p -срочной ренты с начислением процентов m раз в году, $p \geq m$	$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$	j – номинальная ставка процентов

название	формула	составляющие
дисконтированная величина первого платежа годовой ренты	$R \frac{1}{1+i} = Rv$	R – член годовой ренты; i – процентная ставка, начисляемая один раз в конце года; n – срок ренты; $v = \frac{1}{1+i}$ – дисконтный множитель
современная величина годовой ренты постнумерандо при условии, что рента выплачивается один раз в году, а проценты начисляются один раз в конце года	$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;i}$	$a_{n;i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ – коэффициент приведения ренты
современная величина ренты при условии, что платежи делают один раз в конце года, а проценты начисляют m раз в году	$A = R \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = Ra_{mn; \frac{j}{m}}$	j – номинальная ставка процентов
современная величина ренты при условии, что число платежей один раз в году и число начислений процентов $m \rightarrow \infty$	$A = R \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta} - 1} = Ra_{n; \delta}$	
современная величина ренты при условии, что рента выплачивается p раз в году равными платежами, а проценты начисляются один раз в конце года	$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{\left(1+i\right)^{\frac{1}{p}} - 1} = Ra_{n; i}^{(p)}$	
наращенная сумма при условии, что число платежей p в году и число начислений процентов m совпадают	$A = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j} = Ra_{mn; \frac{j}{m}}$	j – номинальная ставка процентов

современная величина ренты в самом общем случае для произвольных значений p и m	$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$	
связь коэффициента дисконтирования и наращенной ренты соотношениями	$a_{n;i} (1+i)^n = s_{n;i}$	
	$s_{n;i} v^n = a_{n;i}$	
размер ежегодной суммы платежа R	$R = \frac{S}{s_{n;i}}$	
	$R = \frac{A}{a_{n;i}}$	
срок постоянной ренты	$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)}$	
	$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)}{\ln(1+i)}$	
ставка процентов	$s_{n;i} = \frac{S}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$	уравнения, где единственным неизвестным является процентная ставка i , решаются приближенно
	$a_{n;i} = \frac{A}{R} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$	

Примеры решения задач

Пример 1 В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн. грн., на которые начисляются проценты по сложной годовой ставке 10%. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение.

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 10 \cdot \frac{(1+0,1)^3 - 1}{0,1} = 33,1 \text{ млн. грн.}$$

Пример 2 Для проведения замены оборудования предприятию необходимо за 10 лет накопить 2 млн. грн.. Ежегодно она может вносить в банк для этой цели 100 000 грн. на специальный счет. Под какую ставку сложных про-

центов необходимо вкладывать эти деньги, чтобы накопить требуемую сумму в указанный срок?

Решение.

Согласно формуле (1.18),

$$s_{n;i} = \frac{S}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{2000000}{100000} = 20.$$

Определим $s_{n;i}$, для нескольких произвольных значений процентных ставок.

Так для $i = 0,14$

$$s_{10;0,14} = \frac{(1+0,14)^{10} - 1}{0,14} = 19,26.$$

Для $i = 0,15$

$$s_{10;0,15} = \frac{(1+0,15)^{10} - 1}{0,15} = 20,33$$

Действительное значение процентной ставки лежит в интервале $0,14 < i < 0,15$, так как $19,26 < 20 < 20,33$.

Воспользуемся формулой (5.19) и найдем действительное значение процентной ставки:

$$i = 0,14 + \frac{20 - 19,26}{20,33 - 19,26}(0,15 - 0,14) = 0,1469.$$

Проверим правильность нахождения действительной процентной ставки:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0,1469)^{10} - 1}{0,1469} = 20$$

Таким образом, процентная ставка должна составлять $i = 14,69\%$.

Пример 3 Производятся взносы в течение 15 лет, ежегодно по 10000 грн., на которые начисляются проценты по сложной ставке 12% годовых. Определить наращенную сумму.

Решение.

В данной задаче рассматривается годовая рента постнумерандо. Её наращенная сумма вычисляется по формуле $S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$. Подставляя численные значения, получаем

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1000 \cdot \frac{(1+0,12)^{15} - 1}{0,12} = 372797,15 \text{ грн.}$$

Другой способ состоит в использовании таблиц коэффициентов наращенной годовой ренты.

По таблице находим: $s_{n; i} (n=15; i=12) = 37,27971466$, после чего определяем наращенную сумму путём умножения коэффициента наращения на размер ренты: $S = R s_{n; i} = 10000 \cdot 37,27971466 = 372797,15$ грн.

Пример 4 Для создания пенсионного фонда организация ежегодно перечисляет в банк ренту постнумерандо в размере 10 млн. грн. На поступающие платежи начисляют сложные проценты по годовой процентной ставке 18% годовых. Определить размер фонда через 6 лет. Приняв, что банк начисляет проценты ежеквартально, определить, какой вариант начисления процентов выгоден кредитору.

Решение.

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 10 \cdot \frac{(1+0,18)^6 - 1}{0,18} = 94,41 \text{ млн. грн.};$$

$$S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} = R \frac{\left(1 + \frac{0,18}{4}\right)^{24} - 1}{\left(1 + \frac{0,18}{4}\right)^4 - 1} = 97,45 \text{ млн. грн.}$$

Значит, кредитору выгодно ежеквартальное начисление процентов на ренту, при этом размер фонда будет составлять 97,45 млн. грн.

Пример 5 Ежегодная финансовая рента сроком на 7 лет составляет для фирмы 200 грн. Платежи осуществляются поквартально. Проценты в размере 5% годовых капитализируются поквартально. Найти современную стоимость такой ренты.

Решение. Исходя из условий задачи, выбираем расчётную формулу

$$A = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}$$

Подставляя численные значения, получаем

$$A = 200 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{-4 \cdot 7}}{0,05} = 4000 \text{ грн.}$$

Итак, современная стоимость потока платежей составила 4000 грн.

Пример 6 Определить размер ежегодных платежей по сложной ставке 10% годовых для создания через пять лет фонда в размере 600000 грн.

Решение. Член ренты вычисляется по формуле $R = \frac{S}{s_{n; i}}$, где $s_{n; i}$ – множитель наращения ренты. Найдём его двумя способами.

Способ 1. По таблицам множителей наращенения для $n = 5$ и $i = 0,1$ находим $s_{n,i} = 6,0151$. Отсюда получаем ответ: $R = \frac{600000}{6,0151} = 99748,97$ грн.

Способ 2. Вычисления можно произвести и не используя таблицы. Для этого из соотношения для расчёта наращенной суммы ренты $S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ выражаем R :

$$R = \frac{Si}{(1+i)^n - 1} = \frac{600000 \cdot 0,1}{(1+0,1)^5 - 1} = 99748,97 \text{ грн.}$$

Пример 7 Какой срок необходим для накопления 100 млн. грн. при условии, что ежемесячно вносится по 12 млн. грн., а на накопления ежегодно начисляются проценты по ставке 25% годовых?

Решение. В этой задаче $S = 100$ млн. грн.; $R = 12$ млн. грн.; $i = 0,25$; $p = 12$; $m = 1$.

Подставляя эти численные значения в формулу для случая $p > 1$ и $m = 1$, получаем

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}p \left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right] + 1\right)}{\ln(1+i)} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{100}{12} \cdot 12 \left[(1+0,25)^{\frac{1}{12}} - 1\right] + 1\right)}{\ln(1+0,25)} = 4,7356 \text{ года.}$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Ежегодная финансовая рента сроком на три года составляет для фирмы 40 тыс. грн. Платежи осуществляются ежеквартально. Проценты в размере 10% годовых. Определить наращенную сумму такой ренты.

2. Ежегодная финансовая рента сроком на 10 лет составляет для фирмы 30 тыс. грн. Проценты в размере 10% годовых начисляются ежемесячно. Определить наращенную сумму такой ренты, если выплаты производятся поквартально.

3. Платежи величиной 6000 грн. вносятся ежегодно в течение трёх лет с начислением на них процентов по сложной ставке 15% годовых. Определить наращенную сумму аннуитета и коэффициент наращенения.

4. В страховой фонд производятся взносы в течение десяти лет ежегодно по 10000 тыс. грн., на которые начисляются проценты по сложной ставке 5% годовых. Определить наращенную сумму ренты и коэффициент наращения.

5. Производственная фирма приняла решение о создании инвестиционного фонда. Для этого в течение пяти лет в конце каждого года вносится 10 млн. грн. под сложные 20% годовых с последующей капитализацией. Определить наращенную сумму.

6. Ежегодная финансовая рента сроком на 7 лет составляет для фирмы 4000 грн. Платежи осуществляются ежемесячно. Проценты в размере 10% годовых капитализируются ежемесячно. Найти современную стоимость такой ренты.

7. Ежегодная финансовая рента сроком на 15 лет составляет для фирмы 600 грн. Платежи осуществляются ежегодно. Проценты в размере 20% годовых капитализируются ежемесячно. Найти современную стоимость такой ренты.

8. Ежегодная финансовая рента сроком на 6 лет составляет для фирмы 500 грн. Проценты начисляются непрерывно с силой роста 0,3. Найти современную стоимость такой ренты.

9. Ежегодная финансовая рента сроком на 5 лет составляет для фирмы 600 грн. Платежи осуществляются ежегодно. Проценты в размере 15% годовых капитализируются по полугодиям. Найти современную стоимость такой ренты.

10. Ежегодная финансовая рента сроком на 2 года составляет для фирмы 8000 тыс. грн. Платежи осуществляются по полугодиям. Проценты в размере 5% годовых. Найти современную стоимость такой ренты.

11. Какой срок необходим для погашения задолженности в размере 1100 тыс. грн. при условии, что ежегодно вносится 1 тыс. грн. На сумму долга начисляются проценты по номинальной ставке 20% с поквартальной капитализацией.

12. Какой срок необходим для накопления 50 тыс. грн. при условии, что ежеквартально вносится 5 тыс. грн., а на накопления начисляются проценты по номинальной ставке 10% с ежемесячной капитализацией.

13. Определить размер ежегодных взносов, необходимых для создания целевого фонда в сумме 1500 тыс. грн. Срок 6 лет, процентная ставка равна 10%, платежи ежегодные постнумерандо.

14. Какой срок необходим для накопления 10000 грн. при условии, что ежемесячно вносится 1 млн. грн., а на накопления начисляются проценты по ставке 10% годовых.

15. Фирма «Прогресс» планирует через 3 года провести на своих автозаправочных станциях модернизацию оборудования. На эти цели необходимо выделить 150 млн. грн. Банк готов заключить договор на этот срок под сложные проценты 20% годовых. Определить величину ежегодного ассигнования, позволяющую накопить указанную величину фонда.

16. В течение семи лет в фонд в конце каждого года поступают средства по 10 тыс. грн., на которые начисляются проценты по ставке 15 % годовых. Определить коэффициент наращения ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

17. В условиях задачи 16 предположить, что проценты начисляются поквартально. Определить коэффициент наращивания ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

18. В условиях задачи 16 предположить, что выплаты производятся поквартально. Определить коэффициент наращивания ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

19. В условиях задачи 16 предположить, что проценты начисляются, а выплаты производятся ежемесячно. Определить коэффициент наращивания ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

20. В условиях задачи 16 предположить, что проценты начисляются, а выплаты производятся ежемесячно. Определить коэффициент наращивания ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

21. В условиях задачи 16 предположить, что проценты начисляются ежемесячно (поквартально), а выплаты производятся поквартально. Определить коэффициент наращивания ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

22. В фонд в течение семи лет в конце каждого года поступают средства по 10 тыс. грн., на которые начисляются проценты по силе роста 15 % годовых, причем выплаты производятся поквартально (раз в году), а проценты начисляются непрерывно. Определить коэффициент наращивания ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

23. В фонд в течение семи лет в конце каждого года поступают средства по 10 тыс. грн., на которые начисляются проценты по силе роста 15 % годовых, причем выплаты производятся и проценты начисляются непрерывно. Определить коэффициент наращивания ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

24. В фонд в течение семи лет ежегодно в начале каждого года поступают средства по 10 тыс. руб., на которые начисляются проценты по ставке 15 % годовых. Определить коэффициент наращивания ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

25. Создается фонд, в который делаются взносы в течение 10 лет один раз в конце года по 50 тыс. грн. На собранные средства начисляются проценты по сложной ставке 10 %. Определить размер фонда к концу срока.

26. Найти наращенную сумму ренты при условии, что процент начисляется ежеквартально. Взносы делаются в течение 10 лет один раз в конце года по 40 тыс. грн. Сложная годовая ставка равна 12 %.

27. Для создания премиального фонда один раз в год производятся взносы 4 тыс. грн. На вносимые средства начисляются проценты по сложной ставке

6 % годовых. Определить размер фонда через 5 лет, если начисление процентов происходит 2 раза в году.

28. Создается фонд на основе ежегодных отчислений в начале года 10 тыс. грн. в течение 5 лет по сложной процентной ставке 20 %. Найти сумму фонда к концу периода.

29. Заменить 10-летнюю годовую ренту с годовым платежом 600 долл. на 7-летнюю. Ставка 8 % в год.

30. Заем был взят под 16 % годовых, выплачивать осталось ежеквартально по 500 долл. в течение 2 лет. Из-за изменения ситуации в стране процентная ставка снизилась до 6 % годовых. В банке согласились с необходимостью пересчета ежеквартальных выплат. Каков должен быть размер выплаты?

31. Что выгоднее купить: оборудование стоимостью 20 тыс. долл. или арендовать его на 8 лет с ежегодным арендным платежом 3 тыс. долл., если ставка процентов – 6 %, а норматив доходности – 15 %. Обосновать решение.

32. Покупатель предложил два варианта расчета при покупке квартиры:

а) 5 тыс. долл. немедленно, а затем 1 тыс. долл. в течение 5 лет;

б) 8 тыс. долл. немедленно, и затем по 300 долл. в течение 5 лет.

Годовая ставка – 5 %. Выбрать более выгодное решение.

33. Страховая компания, заключившая договор с производственной фирмой на 3 года, поступающие ежегодные взносы – 5 млн. грн. – помещает в банк под 15 % годовых с начислением процентов по полугодиям. Определить сумму, полученную страховой компанией по этому контракту.

34. Фирмой предусматривается создание в течение 3 лет фонда развития в размере 150 тыс. грн. Фирма имеет возможность ассигновать на эти цели ежегодно 41,2 тыс. грн., помещая их в банк под 20 % (сложных) годовых. Какая сумма потребовалась бы фирме для создания фонда в 150 тыс. грн., если бы она ее поместила в банк на 3 года под 20 % годовых?

35. Семья хочет накопить 12 тыс. долл. на покупку машины, вкладывая в банк 1000 долл. ежегодно. Годовая ставка в банке – 7 %. Определить период, за который накопится нужная сумма.

36. Для мелиоративных работ государство перечисляет фермеру 500 долл. в год. Деньги поступают на специальный счет и на них начисляют каждые полгода 4 % сложных годовых. Сколько накопится на счете через 5 лет?

37. Каждые полгода на банковский счет писателя издательство перечисляет 2 тыс. грн., на которые банк начисляет каждые полгода 7 % годовых. Сколько будет на счете через 4 года?

38. Какая сумма предпочтительней при ставке 6 %: 1000 долл. сегодня или 2000 долл. через 8 лет.

39. Сын имел в банке счет 50 тыс. грн., на которые ежемесячно начислялись 0,8 %. Сын уехал в командировку за границу, доверив отцу за 10 лет истратить весь его счет. Сколько будет получать в месяц отец?

40. В ходе судебного заседания выяснилось, что по вине пенсионного фонда города N в течение 10 лет недоплачивали 100 грн. пенсии ежемесячно. Суд обязал фонд выплатить всю задолженность с процентами (12 % сложных годовых). Какова сумма выплаты?

41. В ходе судебного заседания выяснилось, что город N недоплачивал налогов 100 грн. ежемесячно. Налоговая инспекция хочет взыскать недоплаченные за последние 2 года налоги вместе с процентами (3 % ежемесячно). Какую сумму заплатит город N ?

42. Семья собирается через 6 лет купить дачу за 12 тыс. долл. Какую сумму (равномерно) ей нужно каждый год из этих 6 лет добавлять на счет в банке, если годовая ставка процентов 8 %?

43. Заменить годовую десятилетнюю ренту с годовым платежом 1000 долл. на ренту с полугодовым платежом по 600 долл. и найти n , годовая ставка – 8 %.

44. Формируется фонд на основе ежегодных отчислений в сумме 5 млн. грн. с начислением на них процентов по сложной ставке 20 %. Определить фонд через 8 лет.

45. В фонд в течение n лет поступают одинаковые платежи. Начисление процентов происходит раз в году. Платежи производятся p раз в год. Найти коэффициент наращивания ренты при процентной ставке в i %. Расчетные данные приведены в табл. 6.

№ варианта	n	p	i
1	5	4	10
2	7	2	15
3	6	12	12
4	8	1	13
5	9	4	14
6	7	4	15
7	10	2	10
8	11	12	11
9	8	2	12
10	9	4	13

46. Определить размер ежегодных платежей в конце года по сложной процентной ставке 14 % годовых для накопления через 3 года суммы 50 тыс. грн.

47. Взят кредит на сумму 50 тыс. грн. сроком на 4 года под 15 % годовых. Найти размер ежегодных погасительных платежей в конце года.

48. Размер ежегодных платежей – 5 тыс. грн., процентная ставка – 12 % годовых, наращенная сумма – 30 тыс. грн. Определить срок простой ренты.

49. Определить, под какую процентную ставку нужно вносить каждый год 5 тыс. грн., чтобы через 5 лет накопить сумму 40 тыс. грн.

50. Простая рента с ежегодными платежами 1000 гривен, процентной ставкой 12 % годовых и сроком 4 года отложена на 2 года. Найти наращенную сумму и наращенную стоимость ренты.