УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Электронный учебно-методический комплекс
для студентов физико-математического факультета

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2016

Кафедра методики преподавания математики и информатики

Автор:

Селивоник Светлана Викторовна – доцент кафедры методики преподавания математики и информатики учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», кандидат педагогических наук, доцент.

Рецензенты:

С.А. Марзан – первый проректор учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», кандидат физико-математических наук, доцент.

Кафедра методик преподавания школьных дисциплин учреждения образования «Брестский областной институт развития образования».

Редактор:

С.Н. Ткач – старший преподаватель кафедры информатики и компьютерных систем учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина».

Учебно-методический комплекс предназначен для проведения занятий по дисциплине УВО «Решение задач с параметрами». Его содержание соответствует учебной программе, утвержденной 30.09.2016 г., регистрационный №УД-25-002-16/уч. для студентов специальности 1-02 05 01 Математика и информатика.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методический комплекс составлен в соответствии с рабочей программой дисциплины компонента УВО «Решение задач с параметрами», утвержденной 30.09.2016 г., регистрационный №УД-25-002-16/уч. для студентов специальности 1-02 05 01 Математика и информатика.

Согласно учебному плану для студентов очной формы получения образования на изучение дисциплины отводится 28 аудиторных часов, в том числе 16 лекционных, 12 практических; предусмотрен зачет.

Данный комплекс является электронным учебным изданием, в котором разработаны и систематизированы материалы по методам решения задач с параметрами в объеме, необходимом для формирования у студентов учебных исследовательских умений.

ЭУМК содержит учебную программу (содержание учебного материала и тематическое планирование), разработки лекционных и практических занятий, вопросы и примерные задания для зачета, приложение, которое содержит краткие теоретические сведения и необходимые формулы. Разработка каждого практического занятия содержит ссылки на теоретический материал и на методы решения задач, рассмотренные в соответствующем лекционном занятии. Кроме того, ко всем заданиям каждого практического занятия даны ответы и указания, а к наиболее сложным примерам предложены краткие решения. Это позволит студентам в случае затруднения при решении задач обратиться к соответствующей теории и примерам.

Поскольку дисциплина компонента УВО «Решение задач с параметрами» несет значительную нагрузку по обобщению и систематизации знаний студентов по элементарной математике (алгебраический компонент), а также по формированию у студентов аналитических, конструктивных и исследовательских умений, то при разработке комплекса большое внимание уделено различным методам решения задач: представлены задачи различного уровня сложности; проиллюстрированы различные методы решения одной и той же задачи (аналитический, графический, комплексный). Это позволяет создать условия для формирования готовности будущих учителей математики к организации и проведению учебно-исследовательской работы с учащейся молодежью.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Решение линейных и квадратных уравнений и неравенств с параметрами.

Понятие уравнения и неравенства с одной переменной и одним параметром, его решения. Аналитические приемы решения. Исследование корней квадратного уравнения (решений неравенства) относительно заданных точек. Применение теоремы Виета. Использование при решении задач графика квадратичной функции как графической модели задачи. Задачи, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратичной функции. Решение уравнений и неравенств с параметрами, сводящихся к квадратным уравнениям и неравенствам.

Тема 2. Геометрические приемы решения задач с параметрами.

Построение геометрических моделей задач с параметрами в координатной плоскости $(x; y)$. Преобразование графиков функций (параллельный перенос; поворот и др.). Представление уравнения (неравенства) с одной переменной и одним параметром как уравнения (неравенства) с двумя переменными.

Тема 3. Решение задач с параметрами методом исследовательского анализа.

Комплексное применение аналитических и конструктивных приемов при решении задач с параметрами. Параметрическая плоскость

$(x;a)$. Параметр как равноправная переменная. Использование графических моделей в плоскости $(x;a)$ как основного средства при решении задач с параметрами. Метод замены при решении задач с параметрами.

Тема 4. Свойства функций в задачах с параметрами.

Использование области определения и области значений функции в задачах с параметрами. Наибольшие и наименьшие значения функции. Метод оценки значений функции. Применение свойства ограниченности функций, входящих в структуру уравнений и неравенств. Использование монотонности функции, четности (и нечетности) функции, периодичности функции при решении задач с параметрами.

Тема 5. Применение производной к решению задач с параметрами.

Задачи, связанные с понятием касательной к графику функции в точке. Использование геометрического смысла производной при решении задач с параметрами. Решение задач, связанных с поиском критических точек, нахождением наибольших и наименьших значений функции (на основе использования производной функции). Построение графиков функции как необходимой графической модели для решения задач с параметрами. Решение задач олимпиадного характера с параметрами.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	Название темы	ЛК	ПР
1	Решение линейных и квадратных уравнений и неравенств с параметрами	4	2
2	Геометрические приемы решения задач с параметрами	2	4
3	Решение задач с параметрами методом исследовательского анализа	4	2
4	Свойства функций в задачах с параметрами	2	2
5	Применение производной к решению задач с параметрами	4	2

ТЕМА 1
РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ И КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ

1.1 Понятие уравнения и неравенства с одной переменной и одним параметром, его решения. Аналитические приемы решения. Исследование корней квадратного уравнения (решений неравенства) относительно заданных точек

Уравнение вида $a \cdot x = b$, где a и b – действительные числа (или выражения, зависящие от параметров), x – неизвестное, называется линейным уравнением с одной переменной.

Корнем (решением) уравнения называется значение переменной x, которое обращает уравнение в верное числовое равенство.

В зависимости от значений параметров a и b уравнение имеет:

1) единственный корень $x = \frac{b}{a}$, если $a \neq 0$;

2) бесконечное множество корней, если $a = 0$ и $b = 0$;

3) не имеет корней, если $a = 0$ и $b \neq 0$.

Это и есть схема решения линейных уравнений с параметром.

Решить уравнение с параметром, это значит, найти все значения параметра, при котором: 1) нет корней, 2) есть корни, и найти эти корни

Пример 1.1. Решите уравнение

$$(a^2 - 6a + 5) \cdot x = a - 1 \qquad (1)$$

Решение. Перепишем уравнение (1) в виде:

$$(a-1)\cdot(a-5)\cdot x = a-1 \qquad (2)$$

Рассмотрим следующие случаи:

1) если $a = 1$, то уравнение примет вид $0\cdot x = 0$, тогда его корнем является любое действительное число;

2) если $a = 5$, тогда уравнение запишется в виде $0\cdot x = 4$; уравнение не имеет корней;

3) $a \neq 5$, $a \neq 1$, тогда, разделив обе части уравнения на $(a-1)$, получим уравнение $(a-5)\cdot x = 1$.

Отсюда $x = \frac{1}{a-5}$ – единственный корень уравнения (1).

Отметим, что такие значения параметра, как $a = 1$ и $a = 5$ (в рассмотренном примере) называются *контрольными значениями параметра*, поскольку в зависимости от них уравнение меняет вид, и соответственно изменяются решения уравнения.

К задачам с параметрами, которые рассматриваются в школьном курсе математики, можно отнести, например, поиск решений линейных и квадратных уравнений в общем виде, исследование количества их корней в зависимости от значений параметров.

При решении задач с параметрами следует усвоить главное: параметр, являясь фиксированным, но неизвестным числом, имеет двойственную природу:

1) предполагаемая известность позволяет «работать» с параметром как с числом;

2) степень свободы «работы» с параметром ограничена его неизвестностью.

Например, деление не выражение, содержащее параметр, извлечение корня четной степени из выражений с параметром требуют предварительных исследований, причем результаты этих исследований влияют и на решение и на ответ задачи.

Рассмотрим несколько элементарных примеров.

Пример 1.2. Сравните

$$-a \text{ и } 3a.$$

Решение. Рассмотрим следующие случаи:

1) если $a = 0, \ -a = 3a$;

2) если $a < 0$, то $-a > 3a$;

3) если $a > 0$, то $-a < 3a$.

Пример 1.3. Решите уравнение

$$a \cdot x = 1.$$

Решение. Контрольное значение параметра a=0, поэтому рассмотрим следующие случаи:

1) если $a = 0$, то уравнение примет вид $0 \cdot x = 1$; оно не имеет корней;

2) если $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$ – единственный корень уравнения.

Ответ: при $a = 0$ нет корней; при $a \neq 0$, $x = \frac{1}{a}$.

Пример 1.4. Решите уравнение

$$(a^2 - 1) \cdot x = a + 1.$$

Решение. Заметим, что уравнение можно переписать в виде $(a-1)\cdot(a+1)\cdot x = a+1$, поэтому для данного уравнения есть два контрольных значения параметра: $a = 1$ и $a = -1$.

Рассмотрим следующие случаи:

1) если $a = 1$, то уравнение примет вид: $0 \cdot x = 2$; уравнение не имеет корней;

2) если $a = -1$, получим $0 \cdot x = 0$, и очевидно, что любое действительно значение x является корнем уравнения;

3) если $a \neq 1$ и $a \neq -1$, то $x = \frac{a+1}{(a-1)\cdot(a+1)}$, $x = \frac{1}{(a-1)}$ – единственный корень

Ответ: если $a = 1$, то уравнение не имеет корней; если $a = -1$, то $x = R$; если $a \neq 1$ и $a \neq -1$, то $x = \frac{1}{(a-1)}$.

Пример 1.5. Решите неравенство

$$a \cdot x < 1.$$

Решение. Если a=0, то неравенство примет вид $0 \cdot x < 1$ – верно $\forall x \in R$.

Если $a > 0$, то $x < \frac{1}{a}$ (разделили обе части неравенства на положительное число).

Если $a < 0$, то $x > \frac{1}{a}$ (разделили обе части неравенства на отрицательное число).

Ответ: если $a = 0, x \in R$; если $a > 0$, то $x \in (-\infty; \frac{1}{a})$; если $a < 0$, то $x \in (\frac{1}{a}; +\infty)$.

Обратите внимание, что во всех решенных примерах областью допустимых значений, как для переменной, так и для параметра, являлось множество всех действительных чисел.

Рассмотрим примеры другого типа.

Пример 1.6. Решите уравнение

$$\frac{x-a}{x-1} = 0.$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x = a, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Поэтому, если $a \neq 1$, то решением является $x = a$; если же $a = 1$, то решений нет.

Ответ: если $a \neq 1$, то $x = a$; если $a = 1$, то нет решений.

Рассмотрим задачи, где за счет параметра на переменную накладываются определенные ограничения.

Для задач таких типов используются формулировки: «При каком значении параметра уравнение (неравенство, система) имеет одно (два, бесконечно много) решение (решений)?»; «Найдите значение параметра, при котором решением уравнения (неравенства, системы) является какое-то подмножество действительных чисел» и др.

Пример 1.7. При каких значениях параметра a неравенство $(x-a)(x-2) \leq 0$ имеет единственное решение?

Решение. Легко видеть, что если $a \neq 2$, то решением неравенства будет отрезок, а при $a = 2$ неравенство примет вид $(x-2)^2 \leq 0$, решением которого будет единственное число 2.

Пример 1.8. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - x + 3 = 0$ имеет единственный корень?

Решение. Контрольное значение параметра $a = 0$, поэтому рассмотрим два случая:

1) если $a = 0$, то уравнение примет вид $0 \cdot x^2 - x + 3 = 0$; отсюда $-x + 3 = 0$; $x = 3$ – единственный корень;

2) если $a \neq 0$, то уравнение $ax^2 - x + 3 = 0$ – квадратное относительно переменной x, поэтому имеет единственный корень, когда $D = 0$.

$D = (-1)^2 - 4 \cdot a \cdot 3 = 1 - 12a = 0$; отсюда $a = \frac{1}{12}$.

Ответ: при $a = 0$ или при $a = \frac{1}{12}$.

Пример 1.9. При каких значениях параметра a уравнение $a \cdot (a+3) \cdot x^2 + (2a+6) \cdot x - 3a - 9 = 0$ имеет более одного корня?

Решение. Рассмотрим следующие случаи (в зависимости от контрольных значений параметра $a = 0$ и $a = -3$):

1) если $a = 0$, то уравнение примет вид $6x - 9 = 0$; отсюда $x = \frac{3}{2}$ – единственный корень;

2) если $a = -3$, то уравнение примет вид $-3 \cdot (-3) - 9 = 0$; $0 = 0$ – верное равенство; следовательно, корнем уравнения является любое действительное число;

3) если $a \neq 0$ и $a \neq -3$, то, разделив обе части уравнения на $(a+3)$, получим уравнение $a \cdot x^2 + 2x - 3 = 0$. (1)

$D = 2^2 - 4 \cdot a \cdot (-3) = 4 + 12a > 0$; $a > -\frac{1}{3}$ – при таких значениях параметра a уравнение (1) имеет два корня. Заметим, что $a = 0$ (учитывая рассмотрение первого случая) надо исключить из полученного промежутка.

Ответ: при $a = -3$, или $-\frac{1}{3} < a < 0$, или $a > 0$.

Достаточно часто в задачах с параметрами приходится исследовать расположение корней уравнения относительно некоторых точек. Рассмотрим следующую задачу.

Пример 1.10. Найдите все значения параметра a, при которых только один корень квадратного трехчлена $x^2 - 2x(a+1) + 6a - 3$ больше 2.

Решение. Найдем корни квадратного трехчлена:

$$x^2 - 2x(a+1) + 6a - 3 = 0.$$

$D_1 = (a+1)^2 - (6a-3) = a^2 + 2a + 1 - 6a + 3 = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 \geq 0.$

Если $D = 0$, то $a = 2$, следовательно, $x_1 = x_2 = 3$ (уравнение имеет единственный корень и он больше 2).

Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня: $x_1 = 3$; $x_2 = 2a - 1$.

Поскольку $x_1 > 2$, и таким свойством должен обладать только один корень, то необходимо, чтобы выполнялось условие $x_2 \leq 2$, то есть $2a - 1 \leq 2$. Отсюда $2a \leq 3$; $a \leq \frac{3}{2}$.

Ответ: при $a = 2$ или при $a \leq \frac{3}{2}$.

1.2 Применение теоремы Виета. Использование при решении задач графика квадратичной функции как графической модели задачи

Приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ является частным случаем уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a=1, b=p, c=q)$.

Теорема 1.1. *(Виета).* Если x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, то справедливы равенства $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$.

Доказательство. Рассмотрим случаи:

1) $D=0$. Тогда уравнение имеет 2 равных корня $x_1=x_2=\frac{-p}{2}$.

Следовательно, $x_1+x_2=\frac{-p}{2}+\left(\frac{-p}{2}\right)=-p$; $x_1\cdot x_2=\frac{-p}{2}\cdot\left(\frac{-p}{2}\right)=\frac{p^2}{4}$.

Но, так как $D=0$, то $p^2-4q=0$, то есть $p^2=4q$, тогда $\frac{p^2}{4}=\frac{4q}{4}=q$.

Получили $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$.

2) $D>0$. Тогда уравнение имеет 2 различных корня $x_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ и $x_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

Найдем сумму корней x_1+x_2 :

$x_1+x_2=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}+\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{-2p}{2}=-p.$

Найдем произведение корней $x_1\cdot x_2$:

$x_1\cdot x_2=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\cdot\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{p^2-(\sqrt{p^2-4q})^2}{4}=\frac{p^2-p^2+4q}{4}=\frac{4q}{4}=q$, что и требовалось доказать.

Теорема 1.2. *(обратная теореме Виета).*

Если для чисел x_1 и x_2 верны равенства $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1, x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство. Заметим, что числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0 \tag{1}$$

и других корней у этого уравнения нет.

После преобразования левой части уравнения (1), получим

$$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 x_2 = 0;$$

$$x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 0.$$

Учитывая условие теоремы, перепишем полученное уравнение в виде

$$x^2 - px + q = 0. \tag{2}$$

Так как уравнения (1) и (2) равносильны, то корнями уравнения (2) являются числа x_1 и x_2.

Теорема доказана.

Приведем примеры использования теоремы Виета при решении задач с параметрами.

Пример 1.11. Найдите все значения параметра a, при которых сумма корней уравнения $x^2 + 2a(x - 1) - 1 = 0$ равна сумме квадратов его корней.

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -2a$ и $x_1 \cdot x_2 = -2a - 1$. Составим равенство

$$x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2. \tag{3}$$

Зная, что $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2$, из равенства (3) получим $x_1 + x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2$; имеем:

$-2a = (-2a)^2 - 2 \cdot (2a - 1)$;

$-2a = 4a^2 + 4a + 2$;

$4a^2 + 6a + 2 = 0$;

$2a^2 + 3a + 1 = 0$;

$a = -1$ или $a = -0,5$.

Ответ: при $a = -1$ или при $a = -0,5$.

Пример 1.12. При каких значениях параметра a корни уравнения

$$ax^2 - 3x - 3 - a^2 = 0 \tag{4}$$

являются целыми числами?

Решение. Рассмотрим случаи:

1) если $a = 0$, то уравнение (4) примет вид $-3x - 3 = 0$; отсюда $x = -1$ – целое число;

2) если $a \neq 0$, то квадратное уравнение (4) будет иметь корни, если $D \geq 0$, то есть $D = 9 - 4a(-3 - a^2) = 9 + 12a + 4a^2 = (2a + 3)^2 \geq 0$ при всех действительных значениях a.

Разделим обе части уравнения (4) на a, получим:

$$x^2 - \frac{3}{a}x - \frac{3+a^2}{a} = 0 \qquad (5)$$

По теореме Виета для уравнения (5) имеем:

$x_1 \cdot x_2 = -\frac{3+a^2}{a} = -(a+\frac{3}{a})$ – целое по условию и $x_1 + x_2 = \frac{3}{a}$ – также целое.

Следовательно, a – делитель числа 3.

Это возможно, если 1) $a = 1$; 2) $a = -1$; 3) $a = 3$; 4) $a = -3$.

Рассмотрим последовательно все эти случаи.

1) Если $a = 1$,то

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -4, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

отсюда $x = 4$ или $x = 1$.

2) Если $a = -1$, то

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 4, \\ x_1 + x_2 = -3. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет.

3) Если $a = 3$, то

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -4, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Система не имеет целых решений.

4) Если $a = -3$,

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 4, \\ x_1 + x_2 = -1. \end{cases}$$

Система не имеет решений.

Ответ: при $a = 0$ или $a = 1$.

Пример 1.13. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 - 2(a-1)\cdot x + 2a + 1 = 0 \tag{6}$$

имеет 2 положительных корня?

Решение (I способ). Для того, чтобы уравнение имело корни, должно выполняться условие $D \geq 0$:

$$(2(a-1))^2 - 4(2a+1) \geq 0;$$

$$4(a^2 - 2a + 1) - 4(2a+1) \geq 0;$$

$$a^2 - 4a \geq 0;$$

$$a(a-4) \geq 0.$$

Рис. 1.1.

Уравнение (6) имеет корни при $a \leq 0$ или при $a \geq 4$ $\qquad (*)$

Используя теорему Виета, запишем:

$$x_1 \cdot x_2 = 2a + 1 > 0 \text{ и } x_1 + x_2 = 2(a-1) > 0.$$

Отсюда $a > -\frac{1}{2}$ и $a > 1$. Следовательно, $a > 1$.

Учитывая условие (*), получим окончательно: $a \geq 4$.

Ответ: при $a \geq 4$.

Рассмотрим II способ решения задачи с использованием графика квадратичной функции.

Рассмотрим квадратичную функцию $y = x^2 - 2(a-1) \cdot x + 2a + 1$ и построим схематически график, удовлетворяющий условию задачи (рис.1.2).

Заметим, что для того, чтобы уравнение (6) имело два положительных корня, необходимо и достаточно, чтобы имела решение система

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_0 > 0, \\ f(0) > 0. \end{cases}$$

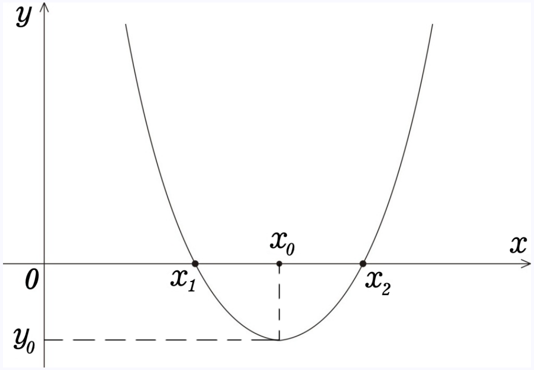

Рис. 1.2.

$D = a(a-4)$; $x_0 = \frac{2(a-1)}{2}$; $f(0) = 2a+1$.
Решим систему

$$\begin{cases} a(a-4) \geq 0, \\ a-1 > 0, \\ 2a+1 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \leq 0, \\ a \geq 4, \end{array}\right. , \\ a > 1 \\ a \geq -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$a \geq 4$.
Ответ: при $a \geq 4$.

Рассмотрим еще несколько примеров использования графика квадратичной функции как графической модели задачи.

Пример 1.14. Найдите все значения параметра а, при которых оба корня уравнения

$$x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0 \tag{7}$$

действительные и больше 3.

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 6ax + (2 - 2a + 9a^2)$ и построим схематически график, удовлетворяющий требованиям задачи. Заметим, что возможны два случая (рис. 1.3; рис. 1.4).

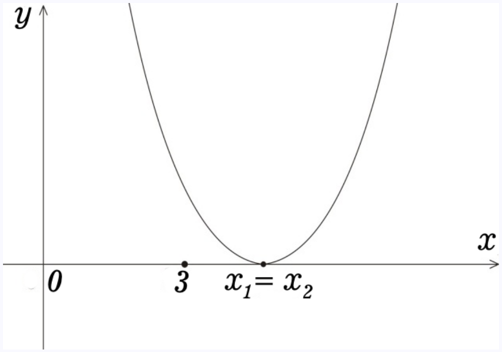

Рис. 1.3.

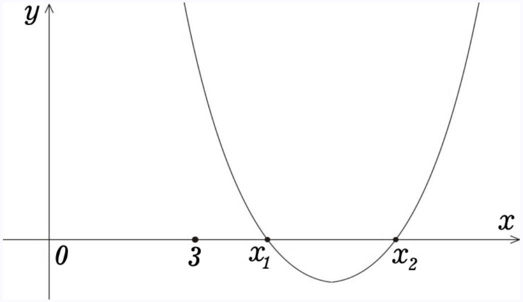

Рис. 1.4.

Чтобы выполнялось требование задачи, необходимо и достаточно, чтобы система

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_0 > 3, \\ f(3) > 0 \end{cases}$$

имела решение.

Заметим, что

$D = (-6a)^2 - 4(2 - 2a + 9a^2) = 36a^2 - 8 + 8a - 36a^2 = -8 + 8a;$

$x_0 = \frac{6a}{2} = 3a;$

$f(3) = 99 - 18a + (2 - 2a + 9a^2) = 9 - 18a + 2 - 2a + 9a^2 = 9a^2 - 20a + 11.$

Составим систему

$$\begin{cases} -8+8a \geq 0, \\ 3a > 3, \\ 9a^2 - 20a + 11 > 0 \end{cases}$$

и решим ее.

$$\begin{cases} 8a \geq 8, \\ a > 1, \\ 9(a-1)(a-\frac{11}{9}) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 1, \\ a > 1, \\ \left[\begin{array}{l} a < 1, \\ a > \frac{11}{9}; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$a > \frac{11}{9}.$$

Ответ: при $a > \frac{11}{9}$.

Замечание 1.1. Для того чтобы уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{8}$$

где $a > 0$ имело два корня, каждый из которых больше некоторого действительного числа p, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись

условия
$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 > p, \\ f(p) > 0. \end{cases}$$
Графическая интерпретация представлена на рисунке 1.5.

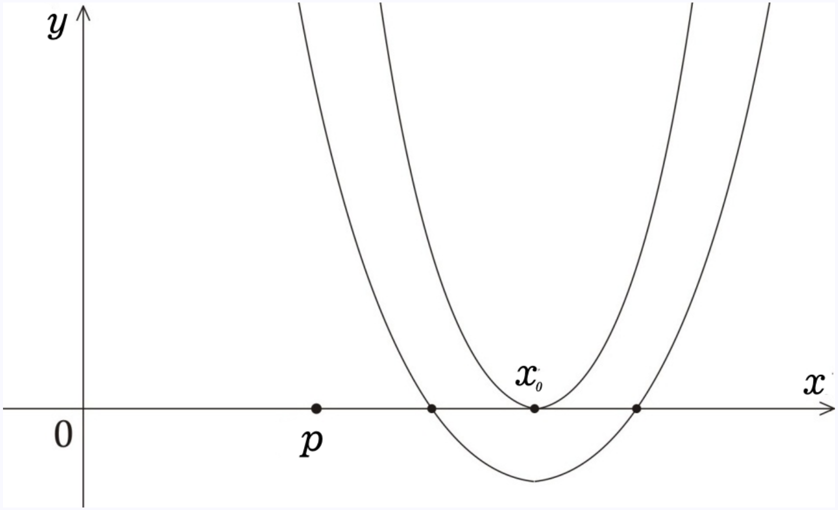

Рис. 1.5.

Замечание 1.2. Для того чтобы уравнение (8) имело корни, меньшие некоторого действительного числа p, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 < p, \\ f(p) > 0. \end{cases}$$

Графическая интерпретация представлена на рисунке 1.6.

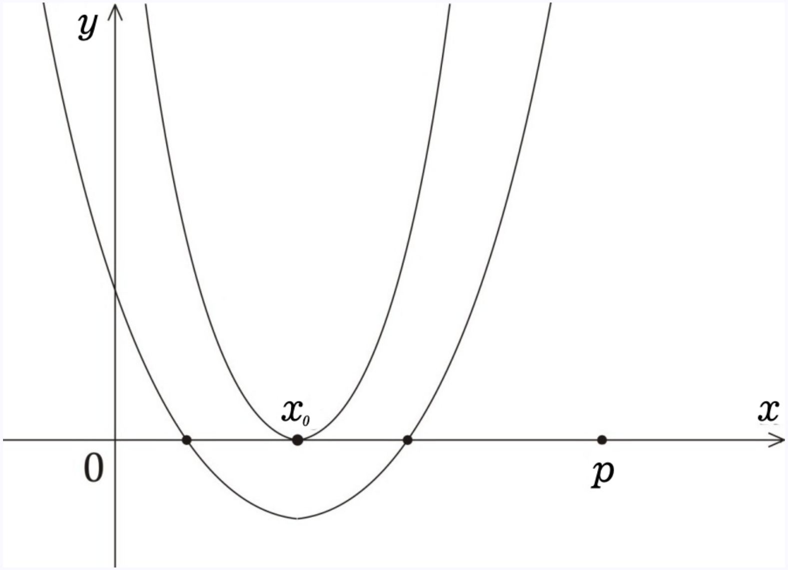

Рис. 1.6.

Замечание 1.3. Для того чтобы уравнение (8) имело корни, один из которых больше действительного числа p, а второй – меньше p, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f(p) < 0$.

Графическая интерпретация представлена на рисунке 1.7.

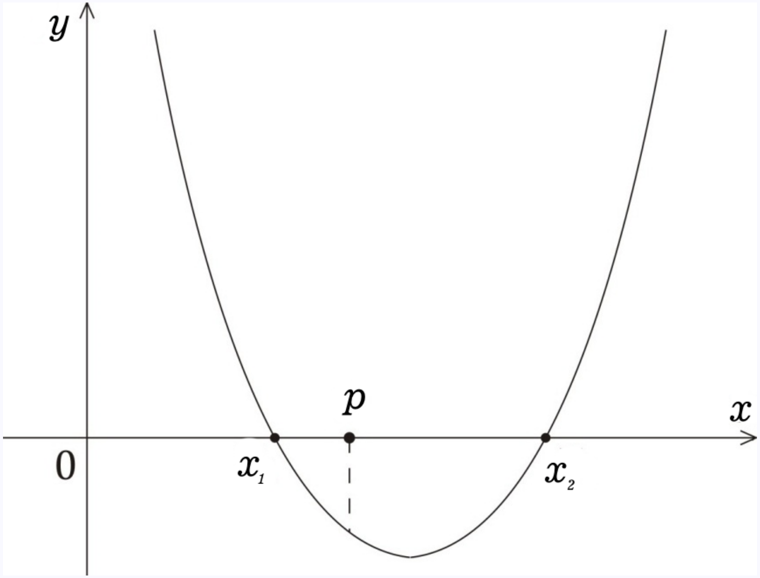

Рис. 1.7.

Пример 1.15. Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $(a-2)\cdot x^2 - 2(a+3)\cdot x + 4a = 0$ имеет два корня, причем один из них больше 3, а второй – меньше 2.

Решение. Рассмотрим (в зависимости от контрольного значения параметра) следующие случаи: 1) $a = 2$; 2) $a \neq 2$.

1) Если $a = 2$, то уравнение примет вид $-10x + 8 = 0; 10x = 8$; $x = 0,8$ – не удовлетворяет условию.

2) Если $a \neq 2$, то возможно что

$$1)\ a - 2 > 0;$$

$$2)\ a - 2 < 0.$$

Рассмотрим графическую интерпретацию (рис. 1.8; рис. 1.9).

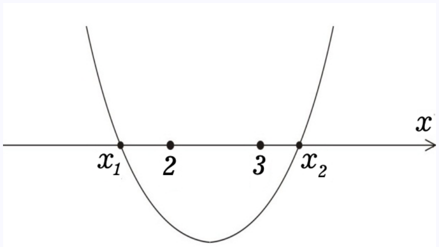

Рис. 1.8.

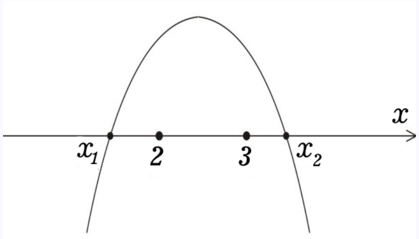

Рис. 1.9.

Для случая 1) составим и решим систему

$$\begin{cases} a > 2, \\ f(2) < 0, \\ f(3) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 2, \\ (a-2)\cdot 2^2 - 2(a+3)\cdot 2 + 4a < 0, \\ (a-2)\cdot 3^2 - 2(a+3)\cdot 3 + 4a < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 2, \\ a < 5, \\ a < 5\frac{1}{7}; \end{cases}$$

$$2 < a < 5.$$

Для случая 2) составим и решим систему

$$\begin{cases} a < 2, \\ f(2) > 0, \\ f(3) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 2, \\ (a-2)\cdot 2^2 - 2(a+3)\cdot 2 + 4a > 0, \\ (a-2)\cdot 3^2 - 2(a+3)\cdot 3 + 4a > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 2, \\ a > 5, \\ a > 5\frac{1}{7}. \end{cases}$$

Система не имеет решений.

Ответ: при всех $a \in (2; 5)$.

Пример 1.16. При каких значениях параметра а множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (a+4)\cdot x + 4a \le y, \\ 3x + y - (2a+4) \le 0 \end{cases}$$

содержит отрезок $[-2; -1]$ оси Ox?

Решение. Первое неравенство системы задает множество точек, лежащих «внутри» параболы $y = f(x)$, включая границу. Тогда это множество будет содержать отрезок $[-2; -1]$ оси абсцисс, если решение неравенства $f(x) \leq 0$ содержит этот отрезок (рис. 1.10).

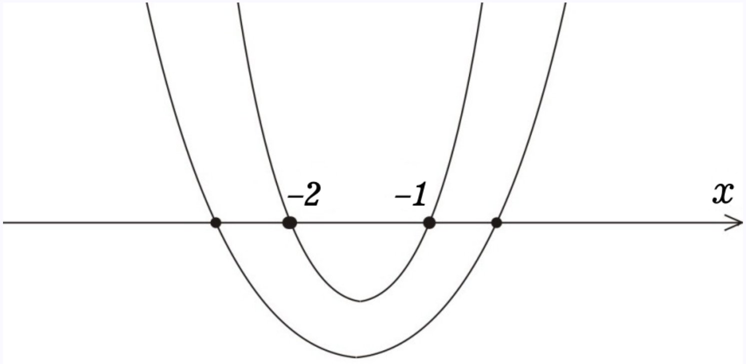

Рис. 1.10.

Графическая иллюстрация показывает, что должны выполняться условия $f(-2) \leq 0$ и $f(-1) \leq 0$.

Получили систему

$$\begin{cases} 4 - 2(a+4) + 4a \leq 0, \\ 1 - a - 4 + 4a \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 - 2a - 8 + 4a \leq 0, \\ -3 + 3a \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a \le 4, \\ a \le 1; \end{cases}$$

$$a \le 1.$$

Второе неравенство системы задает полуплоскость. Если точки $(-2; 0)$ и $(-1; 0)$ принадлежат этой полуплоскости, то и все точки отрезка $[-2; -1]$ также содержатся среди решений этого неравенства. Подставим координаты этих точек в рассматриваемое неравенство, получим

$$\begin{cases} -10 - 2a \le 0, \\ -7 - 2a \le 0. \end{cases}$$

Отсюда $a \ge -\frac{7}{2}$.

Следовательно, решения исходной системы будут удовлетворять требованию задачи, если $a \le 1$ и $a \ge -\frac{7}{2}$.

Ответ: при $-\frac{7}{2} \le a \le 1$.

Пример 1.17. Сколько корней и при каких значениях параметра a имеет уравнение $|x^2 - 4x + 3| = a$?

Решение. Построим схематически график функции $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ (рис. 1.11).

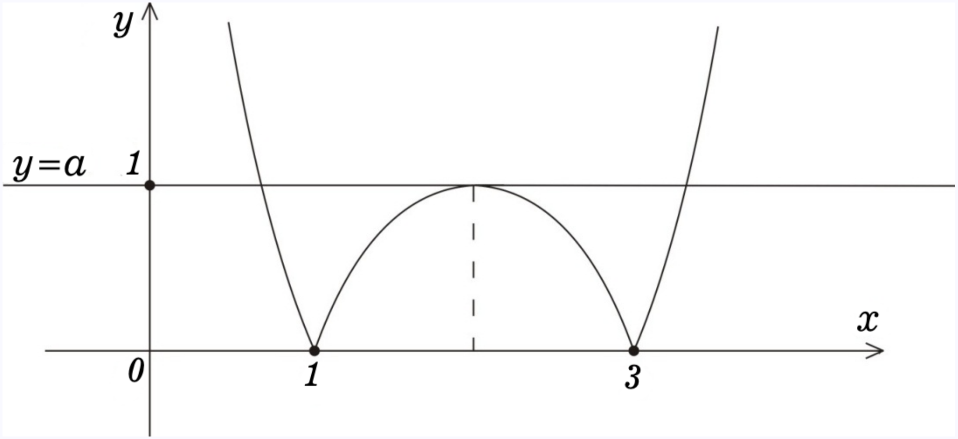

Рис. 1.11.

Графиком функции $y = a$ является семейство прямых, параллельных оси Ox, и расположенных от оси Ox на расстоянии $|a|$.

Графическая модель задачи «подсказывает» ответ:

1) если $a < 0$, то нет корней;

2) если $a = 0$ или $a > 1$, то два корня;

3) если $a = 1$, то три корня;

4) если $0 < a < 1$, то четыре корня.

Ответ: нет корней при $a < 0$; два корня при $a = 0$ или $a > 1$; три корня при $a = 1$; четыре корня при $0 < a < 1$.

ТЕМА 2
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

2.1 Построение геометрических моделей задач с параметрами в координатной плоскости $(x; y)$

В зависимости от роли, которая отводится параметру в задаче (неравноправная или равноправная с переменной) выделяют два основных графических приема:

1) построение графической модели в координатной плоскости xOy;

2) построение графической модели в координатной плоскости xOa.

Рассмотрим схематично структуру первого графического приема.

На плоскости xOy функция $y = f(x; a)$ задает семейство кривых, зависящих от параметра a. От одной кривой семейства можно перейти к какой-либо другой с помощью некоторого преобразования плоскости (параллельный перенос, поворот и т.д.). Выполняя соответствующие преобразования, будем «считывать» с графика ответ задачи.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 2.1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\operatorname{tg}(2 \cdot |x|) + \lg(2 - x) - \lg(\lg a) = 0$ имеет единственный корень.

Решение. Для упрощения решения введем замену $\lg a = t$, $t > 0$, и используем свойство логарифмов:

$$\lg(2\cdot|x|\cdot(2-x))=\lg t.$$

Перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases}2|x|>0,\\ 2-x>0,\\ 2\cdot|x|\cdot(2-x)=t;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\neq 0,\\ x<0,\\ 2\cdot|x|\cdot(2-x)=t;\end{cases}$$

Строим схематический график функции $y=2|x|\cdot(2-x)$ и семейство прямых $y=t$, параллельных оси Ox (рис. 2.1).

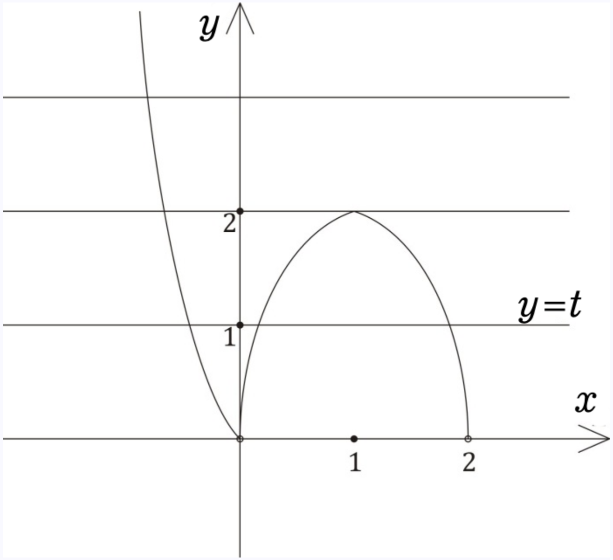

Рис. 2.1.

Полученный график семейство прямых $y = t$ должно пересекать только в одной точке. Это требование выполняется при $t > 2$, то есть при $\lg a > 2$; отсюда $a > 100$.

Ответ: при $a > 100$.

Пример 2.2. Для каждого значения параметра a найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению $|x + 3| - a|x - 1| = 4$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $|x+3|-4 = a|x-1|$ и построим схематично график функции $y = |x + 3| - 4$ (рис. 2.2).

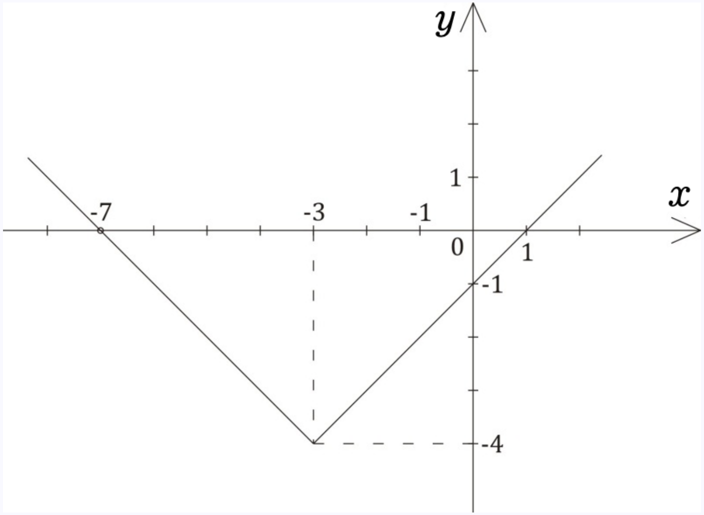

Рис. 2.2.

График функции $g(x) = a \cdot |x-1|$ задает семейство двух лучей (при $a \neq 0$) с общим началом в точке $(1;\, 0)$, которые получаются сжатием вдоль оси Oy (при $a > 1$) растяжением (при $0 < a < 1$), и отображением относительно оси Ox при $a < 0$ (рис. 2.3).

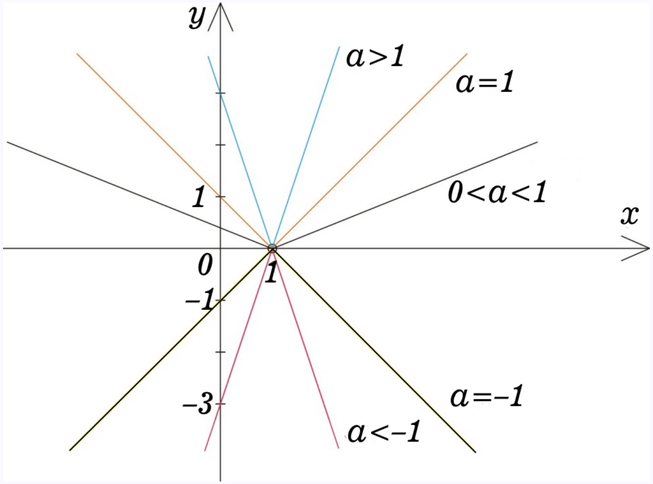

Рис. 2.3.

Располагая графики в одной системе координат, получим ответ:

1) если $a = 0$, то $x = 1$ или $x = -7$;

2) если $a = 1$, то $[1; +\infty)$ – решение;

3) если $a = -1$, то $[-3; 1]$ – решение;

4) если $a > 1$, то $x = 1$;

5) если $a < -1$, то $x = 1$;

6) если $0 < a < 1 \cup -1 < a < 0$, то $x = 1$ или $x = \frac{7+a}{a-1}$.

Пример 2.3. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(a+1), \\ (x+y)^2 = 14 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

Решение. Графиком второго уравнения системы являются две параллельные прямые $x + y = \sqrt{14}$ и $x + y = -\sqrt{14}$ (рис. 2.4).

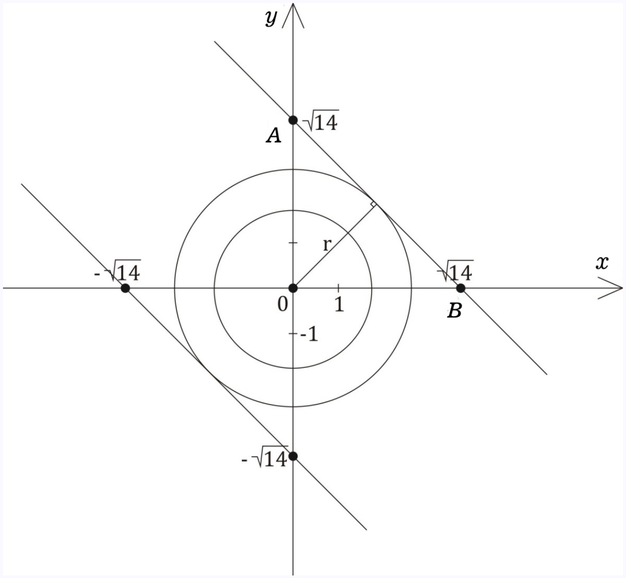

Рис. 2.4.

Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 2(a+1)$ является семейство окружностей с центром в начале координат и радиусом $r = \sqrt{2(a+1)}$ при $a > -1$.

Система будет иметь ровно 2 решения, если окружность будет касаться двух параллельных прямых, то есть если $r = \frac{1}{2} \cdot AB = \sqrt{7}$.

Отсюда $\sqrt{2(a+1)} = \sqrt{7}$;

$2(a+1) = 7$;

$a + 1 = \frac{7}{2}$; $a = \frac{5}{2}$.

Ответ: при $a = 2,5$.

Пример 2.4. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}x, \\ x^2 = 2ax - y^2 + 3 - a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы, выполнив преобразования:

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 3,$$

$$(x - \sqrt{3})^2 + y^2 = (\sqrt{3})^2.$$

Это уравнение задает окружность с центром в точке $A(\sqrt{3}; 0)$ и радиусом $r = \sqrt{3}$.

Переконструируем второе уравнение системы:

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = 3,$$

$$x^2 + (y - a)^2 = (\sqrt{3})^2.$$

Это уравнение задает семейство окружностей с центром $B(0; a)$ и радиусом $R = \sqrt{3}$.

Для выполнения требования задачи надо, чтобы окружности были расположены так, как показано на рисунке 2.5.

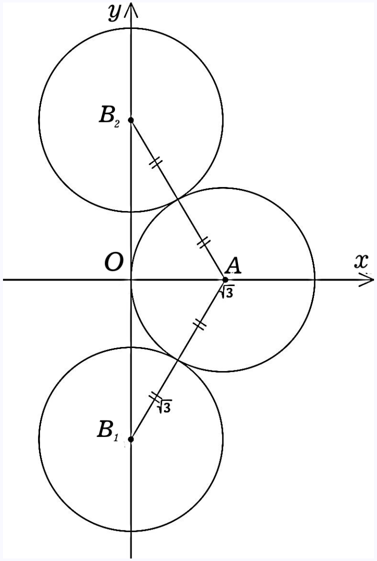

Рис. 2.5.

Из треугольника B_2OA (или B_1OA) имеем:

$$B_2A^2 = B_2O^2 + OA^2 \text{ (или} B_1A^2 = B_1O^2 + OA^2);$$

$$(2\sqrt{3})^2 = a^2 + (\sqrt{3})^2;$$

$$12 = a^2 + 3;$$

$$a^2 = 9;$$

$$a = 3 \text{ или } a = -3.$$

Ответ: при $a = 3$ или $a = -3$.

Рассмотрим пример, в котором рассматривается не одно семейство графиков, а два.

Пример 2.5. При каких значениях параметра a корни уравнения $|x - a^2| = a^2 - 4a - 5$ имеют одинаковые знаки?

Решение. Формула $y = |x - a^2|$ задает семейство двух лучей с общим началом в точке $(a^2; 0)$, а угол, образованный этими лучами, равен $45°$ (графики $y = |x - a^2|$ получены из графика $y = |x|$ сдвигом вдоль оси Ox вправо на a^2 единиц).

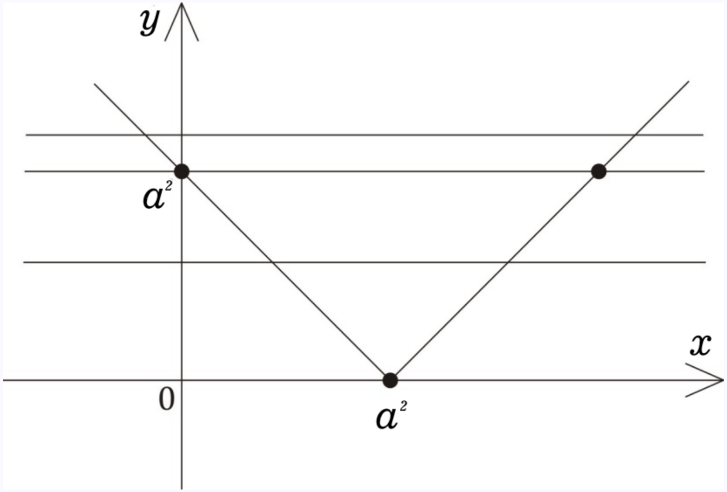

Рис. 2.6.

Второе семейство – это семейство прямых $y = a^2 - 4a - 5$, параллельных оси абсцисс. Эти прямые должны пересекать лучи в точках, абсциссы которых имеют одинаковые знаки. По рисунку 2.6 легко получить условия для параметра, удовлетворяющие требованию задачи:

$$\begin{cases} (a^2 - 4a - 5 < a^2, \\ a^2 - 4a - 5 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a - 5 < 0, \\ (a - 5)(a + 1) > 0; \end{cases}$$

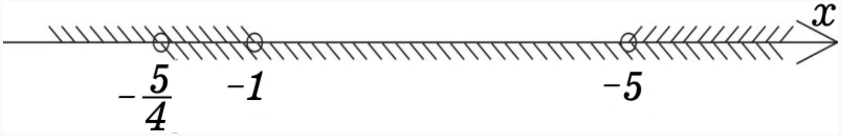

Рис. 2.7.

$$\begin{cases} a > -\frac{5}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} a > 5, \\ a < -1; \end{array}\right. \end{cases}$$

$-\frac{5}{4} < a < -1 \cup a > 5.$

Ответ: при $-\frac{5}{4} < a < -1$ или $a > 5$.

ТЕМА 3
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ МЕТОДОМ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО АНАЛИЗА

3.1 Комплексное применение аналитических и конструктивных приемов при решении задач с параметрами

Пример 3.1. В зависимости от параметров a и b решите неравенство

$$|x-a|+|x+a|<b. \tag{1}$$

Решение. Рассмотрим случай $a>0$. Построим график функции $y=|x-a|+|x+a|$ как сумму графиков $y_1=|x-a|$ и $y_2=|x+a|$ в системе xOy.

Графиком функции $y=b$ является семейство прямых, параллельных оси Ox (рис. 3.1).

С графиков легко «считывается» ответ:

1) если $b\leq 2a$, то неравенство не имеет решений;

2) если $b>2a$, то решением неравенства является любое x из промежутка $(-\frac{b}{2};\frac{b}{2})$.

Концы указанного промежутка легко найти из уравнения $x-a+x+a=b; x=\frac{b}{2}$ – положительная абсцисса точки пересечения графиков функций $y=|x-a|+|x+a|$ и $y=b$.

Рассмотрение случая $a<0$ аналогично предыдущему.

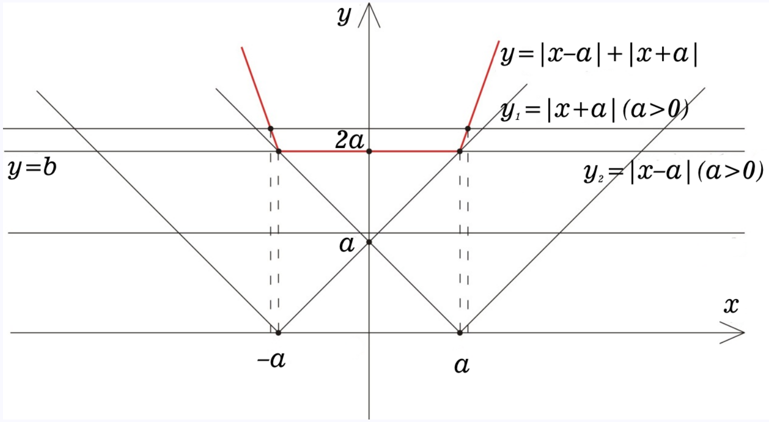

Рис. 3.1.

Ответ: при $b \leq 2|a|$ неравенство не имеет решений; при $b > 2|a|$, то $-\frac{b}{2} < x < \frac{b}{2}$.

Решение неравенства (1) аналитическим способом (например, при $a \geq 0$) предполагает решение трех систем:

$$1) \begin{cases} x < -a, \\ -x + a - x - a < b; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} -a \leq x < a, \\ x - a - x - a < b; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x \geq a, \\ x - a + x + a < b. \end{cases}$$

Аналогично, при $a < 0$ также необходимо решить три системы.

Таким образом, решение неравенства (1) с использованием графической модели – рациональный метод.

Пример 3.2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$|x^2 - a| = a^2 - 6 \tag{2}$$

имеет ровно 3 корня.

Решение(I способ). Рассмотрим равносильный переход:

$$\begin{cases} a^2 - 6 \geq 0, \\ x^2 - a = a^2 - 6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^2 - 6 \geq 0, \\ x^2 - a = 6 - a^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 \geq 6, \\ x^2 = a^2 + a - 6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^2 \geq 6, \\ x^2 = -a^2 + a + 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 \geq 6, \\ \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{a^2 + a - 6}, \\ x = -\sqrt{a^2 + a - 6} \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^2 \geq 6, \\ \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{-a^2 + a + 6}, \\ x = -\sqrt{-a^2 + a + 6}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Возможны следующие случаи:

1) Каждое уравнение каждой системы имеет по 2 различных корня, но один из корней первого уравнения совпадает с одним из корней второго уравнения.

Начало
Содержание
Приложение
Страница 52 из 197
Назад
На весь экран
Закрыть

2) Уравнение первой системы имеет 1 корень, уравнение второй системы имеет 2 различных корня, и ни один из них не совпадает с корнем первого уравнения.

3) Уравнение первой системы имеет 2 различных корня, ни один из которых не совпадает с единственным корнем уравнения второй системы.

Рассмотрение всех трех случаев и аналитическое решение систем приводит к громоздким преобразованиям и вычислениям, однако, читатель может их выполнить самостоятельно.

Поэтому рассмотрим II способ, основанный на использовании графической модели задачи.

Решение (II способ). Построим в системе координат графики функций $y = |x^2 - a|$ и $y = a^2 - 6$ (рис.3.2).

График функции $y = |x^2 - a|$ при $a < 0$ не пересекает ось Ox, при $a = 0$ касается оси Ox в единственной точке $(0; 0)$, поэтому при $a \leq 0$ уравнение (2) не может иметь 3 корня.

При $a > 0$ график расположен так, как показано на рисунке 3.2.

Графиком функции $y = a^2 - 6$ является семейство прямых, параллельных оси Ox, поэтому, чтобы уравнение (2) имело ровно 3 корня, надо чтобы прямая $y = a^2 - 6$ проходила через точку $A(0; a)$, то есть необходимо решить уравнение $a^2 - 6 = a$;

$$a^2 - a - 6 = 0;$$

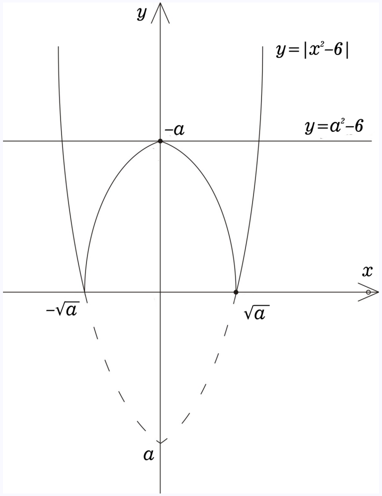

Рис. 3.2.

$$a = -2 \text{ или } a = 3.$$

Следовательно, $a = 3$ (учитывая, что $a > 0$).
Ответ: при $a = 3$.

Пример 3.3. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = 1, \\ (x-3)^2 + y^2 - 4y = a^2 - 4 \end{cases} \tag{3}$$

имеет единственное решение?

Решение. Первое уравнение системы задает окружность с центром в точке $O_1(-2;0)$ и радиусом 1.

Второе уравнение системы можно преобразовать:

$$(x-3)^2 + y^2 - 4y + 4 = a^2,$$

$$(x-3)^2 + (y^2-2)^2 = a^2.$$

Это уравнение задает семейство окружностей с центром $O_2(3;2)$ и радиусом a.

Система (3) будет иметь единственное решение в двух случаях:

1) окружности касаются внутренним образом (точка A; рис. 3.3);

2) окружности касаются внешним образом (точка B; рис. 3.3).

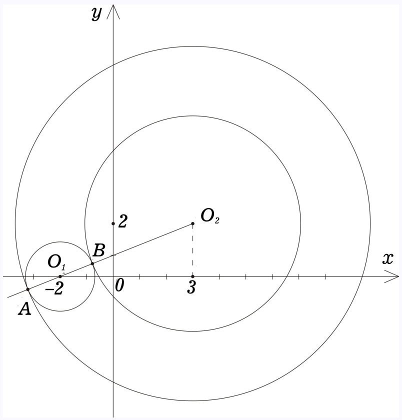

Рис. 3.3.

1. Если окружности касаются внутренним образом в точке A, то радиус a окружности с центром O_2 равен $O_2A = O_2B + 2$.

2. Если окружности касаются внешним образом в точке B, то в прямоугольном треугольнике CO_1O_2 : $O_1O_2 = 1 + a$; $O_1C = 5$; $O_2C = 2$, поэтому получим:

$$(1 + a)^2 = 5^2 + 2^2;$$

$$(1 + a)^2 = 29;$$

$$1 + a = \sqrt{29} \quad \text{или} \quad 1 + a = -\sqrt{29};$$

$$a = \sqrt{29} - 1 \quad \text{или} \quad a = -\sqrt{29} - 1.$$

Тогда радиус $O_2A = O_2B + 2$ (случай 1). Отсюда $a = 1 + \sqrt{29}$ или $a = -1 - \sqrt{29}$.

Ответ: при $a = 1 \pm \sqrt{29}$ или при $a = -1 \pm \sqrt{29}$.

Мы рассмотрели основные типы задач, решение которых предполагает использование аналитических и конструктивных приемов. В зависимости от вида уравнения (неравенства, системы) иногда целесообразнее использовать графическую модель задачи для рационализации решения.

Пример 3.4. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{4^{-x^2} - a \cdot 2^{1-x^2} + a}{2^{1-x^2} - 1} = 3$ имеет хотя бы одно решение?

Решение. Введем замену $2^{-x^2} = t$, причем так как $-x^2 \leq 0$, то $0 < 2^{-x^2} \leq 2^0$, то есть $0 < t \leq 1$.

Уравнение примет вид $\frac{t^2-2t(a+3)+a+3}{2t-1} = 0$. Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} t^2 - 2t(a+3) + a + 3 = 0, \\ 2t - 1 \neq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Возможны следующие случаи:

1) уравнение (4) имеет 2 различных корня, каждый из которых принадлежит промежутку $(0; 1]$;

2) уравнение (4) имеет 2 различных корня, но только один из них принадлежит промежутку $(0; 1]$;

3) уравнение (4) имеет 2 равных корня, которые принадлежат промежутку $(0; 1]$.

Рассмотрим каждый из перечисленных случаев.

1. Уравнение (4) имеет 2 различных корня, каждый из которых принадлежит промежутку $(0; 1]$ (рис. 3.4).

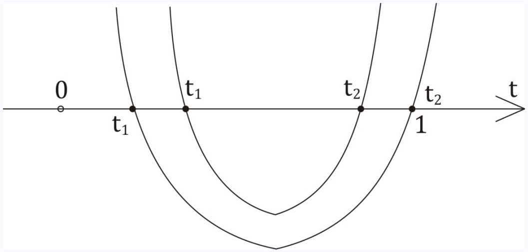

Рис. 3.4.

Возможное схематическое расположение графика функции $y = t^2 - 2t(a+3) + a + 3$ показано на рис. 3.4 и описывается следующей системой:

$$\begin{cases} D > 0, \\ 0 < t_0 < 1, \\ f(0) > 0, \\ f(1) \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (a+3)^2 - (a+3) > 0, \\ 0 < a+3 < 1, \\ a+3 > 0, \\ 1 - 2(a+3) + a + 3 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < -3 \text{ или } a > -2, \\ -3 < a < -2, \\ a > -3, \\ a \le 2. \end{cases}$$

Система не имеет решений.

2. Уравнение (4) имеет 2 различных корня, но только один из них принадлежит промежутку $(0;1]$.

Возможные расположения графика функции $y = t^2 - 2t(a+3) + a + 3$ показано на рисунке 3.5.

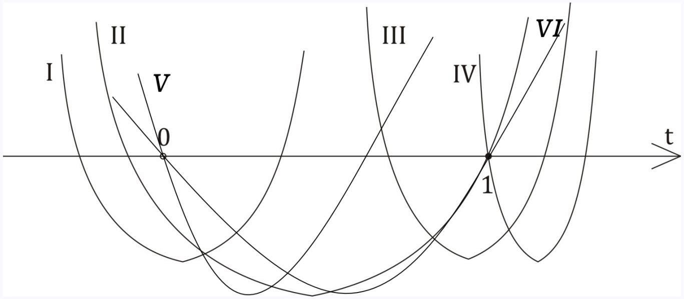

Рис. 3.5.

Запишем системы, соответствующие графической модели задачи:

$$\begin{cases} f(0) < 0, \\ f(1) \geq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(0) \geq 0, \\ f(1) \leq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(1) = 0, \\ x_0 > 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < -3, \\ a \leq -2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a \geq -2, \\ a > -3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = -2, \\ a > -2. \end{cases}$$

Окончательно: $a < -3$ или $a \geq -2$.

3. Уравнение (4) имеет 2 равных корня, которые принадлежат промежутку $(0; 1]$.

При $D = 0$ имеем: $a = -3$ или $a = -2$.

Если $a = -3$, то $t^2 = 0$, тогда $t = 0 \notin (0; 1]$.

Если $a = -2$, то $t = 1 \in (0; 1]$.

Проверим выполнение условия $2t - 1 \neq 0$, то есть найдем, при каких значениях параметра a выполняется условие $t \neq \frac{1}{2}$.

Пусть $t = \frac{1}{2}$, тогда $(\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (a + 3) + a + 3 = 0$, отсюда $\frac{1}{4} = 0$ – неверное равенство при всех значениях параметра a.

Ответ: при $a < -3$ и при $a \geq -2$.

Пример 3.5. При каких значениях параметра a уравнение

$$||x + 1| - a| = 2 \tag{5}$$

имеет ровно 3 различных корня?

Решение (I способ). Уравнение (5) равносильно совокупности уравнений

$$|x+1|-a=2 \qquad \text{или} \qquad |x+1|-a=-2;$$

$$|x+1|=a+2 \quad (*) \qquad \text{или} \qquad |x+1|=a-2 \quad (**).$$

Аналогично задаче 2, следует рассмотреть возможные случаи:

1. Уравнение $(*)$ имеет 2 различных корня, ни один из которых не совпадает с единственным корнем уравнения $(**)$.

2. Уравнение $(**)$ имеет 2 различных корня, ни один из которых не совпадает с единственных корнем уравнения $(*)$.

3. Уравнение $(*)$ и уравнение $(**)$ имеют по 2 различных корня, один из которых совпадает с корнем другого уравнения.

Решение систем, соответствующих каждому из перечисленных случаев, предоставляем читателю для самостоятельной работы.

Решение (II способ). Используем графические представления. Построим графики функций $y=2$ и $y=||x+1|-a|$.

Графиком функции $y=2$ является прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку $A(0;2)$.

График функции $y=|x+1|-a$ получен из графика функции $y=|x|$ сдвигом на 1 единицу влево и на a единиц вниз (если $a>0$) или вверх (если $a<0$).

Для выполнения требований задачи надо, чтобы графики располагались так, как показано на рисунке 3.6.

Заметим, что если точка $B(-1;2)$ является вершиной ломаной, то

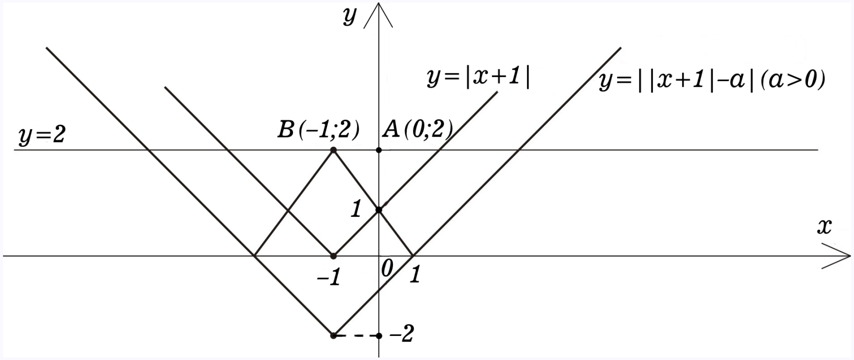

Рис. 3.6.

есть ее координаты удовлетворяют равенству $y = ||x+1| - a|$, то требование задачи выполнятся.

Решим уравнение $2 = ||-1+1| - a|$;

$$2 = |-a|;$$

$$|a| = 2;$$

$$a = 2 \text{ или } a = -2.$$

Учитывая, что $a > 2$, получим, что $a = 2$.

Ответ: при $a = 2$.

Пример 3.6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_{2x}(x+a) = 2 \qquad (6)$$

не имеет корней.

Решение. Рассмотрим систему, равносильную уравнению (6):

$$\begin{cases} 2x > 0, \\ 2x \neq 1, \\ x + a = (2x)^2; \end{cases} \quad \text{отсюда} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 0,5, \\ 4x^2 - x - a = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим дискриминант (D) квадратного уравнения $4x^2-x-a=0$.

$$D = 1^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-a) = 1 + 16a.$$

1. Если $D < 0$, то есть $1 + 16a < 0$, отсюда $a < -\frac{1}{16}$, то уравнение не имеет корней.

2. Если $D = 0$, то есть $a = -\frac{1}{16}$, то уравнение имеет 2 равных корня: $x_1 = x_2 = \frac{1}{8}$.

Заметим, что $x = \frac{1}{8}$ удовлетворяет двум неравенствам системы, поэтому уравнение (6) имеет единственный корень.

3. Если $D > 0$, то есть $a > -\frac{1}{16}$, то уравнение (6) имеет 2 различных корня: $x_1 = \frac{1-\sqrt{1+16a}}{8}$; $x_2 = \frac{1+\sqrt{1+16a}}{8}$.

Для того чтобы в этом случае уравнение (6) не имело корней, надо потребовать выполнение следующих условий:

1) либо оба найденных корня не положительны;

2) либо один из них неположительный, а второй – равен $\frac{1}{2}$.

Первый случай невозможен в силу очевидности неравенства $x_2 > 0$.

Второй случай предполагает решение системы

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{1+16a}}{8} \le 0, \\ \frac{1+\sqrt{1+16a}}{8} = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-\sqrt{1+16a} \le 0, \\ 1+\sqrt{1+16a} = 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{1+16a} \ge 1, \\ \sqrt{1+16a} = 3, \end{cases}$$

$$1+16a = 9;$$

$$16a = 8;$$

$$a = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, при $a = \frac{1}{2}$ уравнение (6) тоже не имеет корней.

Замечание. Найти значение параметра $a = \frac{1}{2}$ можно и по-другому, например, так: найдем значения параметра a, при которых корнем квадратного уравнения $4x^2 - x - a = 0$ является число $\frac{1}{2}$:

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - a = 0;$$

$$4 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - a = 0;$$

$$\frac{1}{2} - a = 0;$$

$$a = \frac{1}{2}.$$

Ответ: при $a = \frac{1}{2}$ или при $a < -\frac{1}{16}$.

Пример 3.7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\cos 2x + \sin^4 x - a^2 + 2a - 1 = 0 \qquad (7)$$

имеет корни.

Решение (I способ). Используем формулу косинуса двойного угла, получим:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x - a^2 + 2a - 1 = 0,$$

$$\sin^4 x - 2\sin^2 x - a^2 + 2a = 0. \qquad (*)$$

Введем замену $sin^2 x = t$, где $0 \le t \le 1$.

Уравнение $(*)$ примет вид:

$$t^2 - 2t - a^2 + 2a = 0, \qquad (**)$$

$$t^2 - 2t + 1 = a^2 - 2a + 1,$$

$$(t-1)^2 = (a-1)^2,$$

$$t - 1 = a - 1 \;\text{ или }\; t - 1 = 1 - a,$$

$$t = a \text{ или } t = 2 - a.$$

Для выполнения требования задачи нужно, чтобы выполнялись условия:

$$0 \leq a \leq 1 \text{ или } 0 \leq 2 - a \leq 1,$$

$$0 \leq a \leq 1 \text{ или } 1 \leq a \leq 2.$$

Следовательно, уравнение будет иметь корни при $0 \leq a \leq 2$.

Ответ: при $0 \leq a \leq 2$.

Решение (II способ). Решим уравнение (**), используя графическую модель задачи: $t^2 - 2t - a^2 + 2a = 0$.

Найдем координаты вершины параболы:

$$t_0 = 1; \qquad y_0 = -a^2 + 2a - 1 = -(a-1)^2.$$

Следовательно, возможны следующие случаи расположения параболы (рис. 3.7) в соответствии с требованиями задачи:

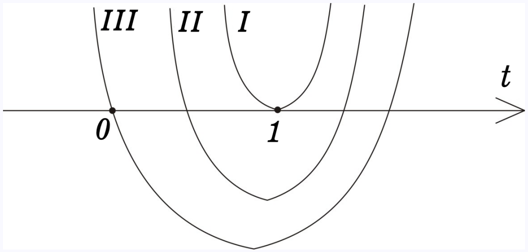

Рис. 3.7.

Составим аналитическую запись, соответствующую графикам (I), (II) и (III).

$I: f(1) = 0,\ -(a-1)^2 = 0;\ a = 1.$

$$II: \begin{cases} f(1) < 0, \\ f(0) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -(a-1)^2 < 0, \\ 2a - a^2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq 1, \\ a(2-a) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq 1, \\ 0 < a < 2; \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \text{ или } 1 < a < 2.$$

$$III: \begin{cases} f(1) < 0, \\ f(0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq 1, \\ a(2-a) = 0; \end{cases} \quad a = 0 \text{ или } a = 2.$$

Объединим полученные в трех случаях решения, получим окончательный ответ.

Ответ: при $0 \leq a \leq 2$.

Замечание. Решение уравнения $(*)$ аналитическим методом является рациональным за счет конструкции самого уравнения (легко выделяются полные квадраты).

Пример 3.8. При каких значениях параметра a уравнение

$$a \cdot \cos 2x = \sin x \tag{8}$$

имеет на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ единственный корень?

Решение. Рассмотрим контрольное значение параметра $a = 0$. Уравнение примет вид $\sin x = 0 \qquad (8.1)$.

Отсюда $x = \pi n$, $n \in Z$.

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ уравнение (8.1) имеет единственный корень $x = 0$.

Пусть $a \neq 0$, тогда используем формулу косинуса двойного угла, получим:

$$a(1 - 2\sin^2 x) = \sin x,$$
$$-2a \cdot \sin^2 x - \sin x + a = 0,$$
$$2a \cdot \sin^2 x + \sin x - a = 0.$$

Введем замену $sinx = t$, где $-1 \leq t \leq 1$, получим квадратное $(a \neq 0)$ уравнение $2at^2 + t - a = 0| : 2a$;

$$t^2 + \frac{1}{2a} \cdot t - \frac{1}{2} = 0.$$

Заметим, что полученное квадратное уравнение имеет 2 различных корня $(D > 0)$, и так как $t_1 \cdot t_2 = -\frac{1}{2}$, то эти корни имеют разные знаки (пусть $t_1 < t_2$).

Для выполнения требования задачи надо, чтобы выполнялось условие:

а) если $-1 \leq t_1 < 0$, то $t_2 > 1$, или наоборот,

б) если $0 < t_2 \leq 1$, тогда $t_1 < -1$.

Графическая модель задачи (при $a > 0$), соответствующая условиям (а) и (б), представлена на рисунке 3.8.

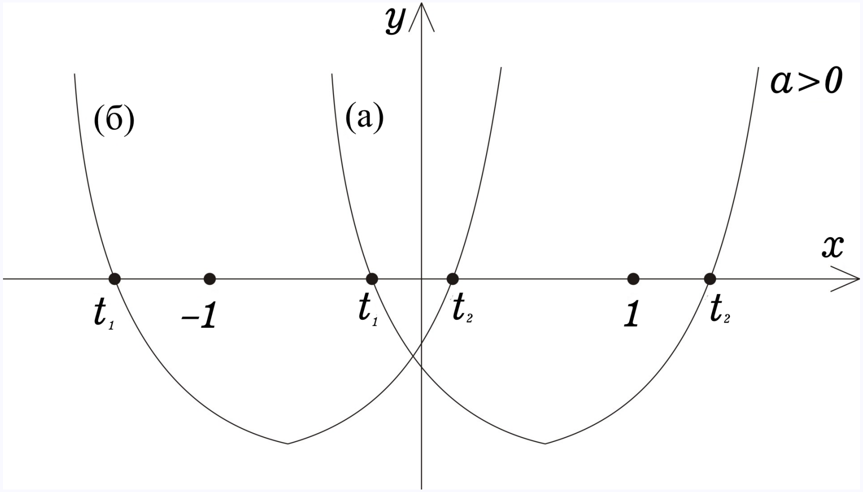

Рис. 3.8.

Системы:

$$(\text{а}) \begin{cases} f(1) < 0, \\ f(-1) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + 1 - a < 0, \\ 2a - 1 - a > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < -1, \\ a > 1; \end{cases} \quad \varnothing$$

$$(\text{б}) \begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a - 1 - a < 0, \\ 2a + 1 - a > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 1, \\ a > -1; \end{cases} \quad -1 < a < 1.$$

Графическая модель задачи (при $a < 0$), соответствующая условиям (а) и (б), представлена на рисунке 3.9.

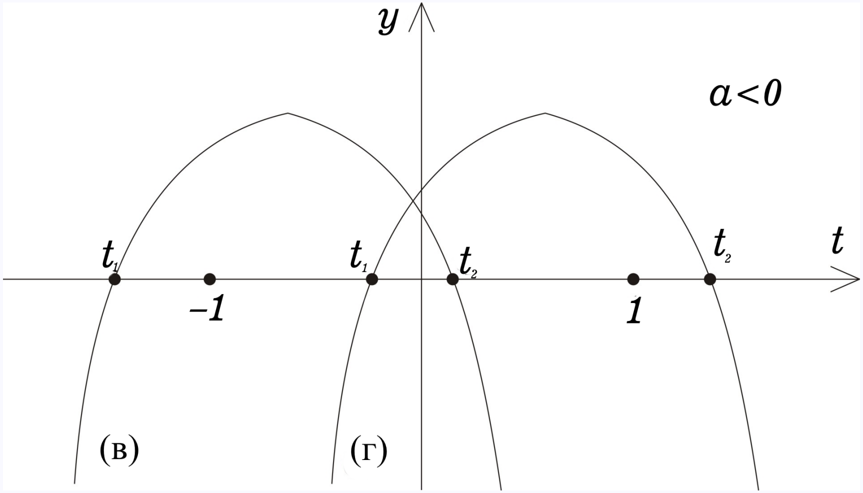

Рис. 3.9.

Система(в):

$$\begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(1) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a - 1 - a > 0, \\ 2a + 1 - a < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > 1, \\ a < -1; \end{cases} \quad \varnothing$$

Система(г):

$$\begin{cases} f(1) > 0, \\ f(-1) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + 1 - a > 0, \\ 2a - 1 - a < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > 1, \\ a < 1; \end{cases} \quad \varnothing$$

Окончательно: $-1 < a < 1$.

Ответ: при $-1 < a < 1$.

3.2 Параметрическая плоскость $(x; a)$. Параметр как равноправная переменная. Использование графических моделей в плоскости $(x; a)$ как основного средства при решении задач с параметрами

Конструктивные приемы решения задач с параметрами, связанные с построением графической модели задачи в координатной плоскости xOy, были рассмотрены в предыдущих лекциях. Однако многие задачи можно решить рационально, если рассматривать параметр как равноправную переменную. В таких случаях можно использовать:

1) параметрическую плоскость xOa, в которой x – независимая переменная, a – зависимая;

2) параметрическую плоскость aOx, в которой a – независимая переменная, x – зависимая.

Выбор параметра a в качестве независимой переменной или зависимой переменной связан с тем, что легче ли выразить: x через a или, наоборот, a через x.

Рассмотрим задачи, связанные с построением графических моделей уравнений, неравенств в параметрической плоскости xOa.

Пример 3.9. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $log_{1-x}(a - x + 2) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$.

Решение. Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} 1 - x > 0, \\ 1 - x \neq 1, \\ a - x + 2 = (1 - x)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1, \\ x \neq 0, \\ a = x^2 - x - 1. \end{cases}$$

Поскольку параметр a легко выражается через переменную x, то рассмотрим систему координат $(x; a)$, в которой построим график функции $a = x^2 - x - 1$, при условии $x \neq 0$, $x < 1$.

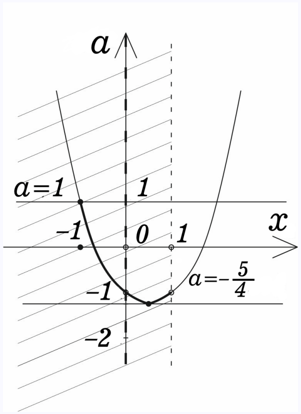

Рис. 3.10.

Уравнение будет иметь хотя бы один корень на промежутке $[-1;1)$, если $-\frac{5}{4} \le a < -1$ или $-1 < a \le 1$.

Пример 3.10. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a+1-|x-1|)\cdot(a+x^2-4x)=0 \qquad (3.1)$$

имеет 4 различных корня?

Решение (I способ). Данное уравнение часто называют распадающимся, поскольку, используя равносильный переход, можно записать:

$$a+1-|x-1|=0 \text{ или } a+x^2-4x=0,$$
$$|x-1|=a+1 \quad (1) \text{ или } x^2-4x+a=0 \quad (2).$$

Заметим, что уравнения (1) и (2) будут иметь по 2 различных корня, если $a+1>0$ и $4-a>0$.

Отсюда $-1<a<4$.

Найдем корни уравнения (1):

$$x-1=a+1 \text{ или } x-1=-a-1,$$
$$x=a+2 \text{ или } x=-a.$$

Подставим найденные корни в уравнение (2).

$$x=a+2:(a+2)^2-4(a+2)+a=0,$$

$$a^2 + 4a + 4 - 4a - 8 + a = 0,$$

$$a^2 + a - 4 = 0.$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17;\; a_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2};\; a_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}.$$

$$x = -a : (-a)^2 - 4 \cdot (-a) + a = 0,$$

$$a^2 + 5a = 0,$$

$$a = 0 \text{ или } a = -5.$$

Исключим найденные значения параметра a из промежутка $(-1; 4)$, поскольку при найденных значениях a (1) и (2) будут иметь одинаковые корни.

Ответ: при $-1 < a < 0$, или при $0 < a < \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, или при $(\frac{-1+\sqrt{17}}{2} < a < 4$.

Рассмотрим II способ решения уравнения 3.1, используя графическую модель задачи.

Построим графики функций $a = |x - 1| - 1$ и $a = -x^2 + 4x$ в параметрической плоскости xOa (x – независимая переменная, a – зависимая переменная).

График функции $a = |x - 1| - 1$ получен из графика $a = |x|$ сдвигом на 1 вправо и 1 вниз.

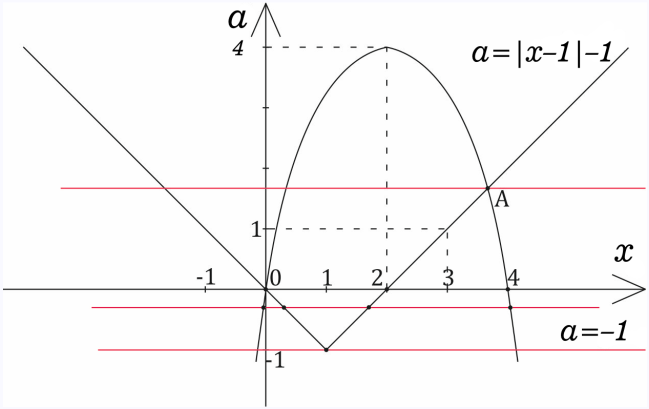

Рис. 3.11.

Графиком функции $a = -x^2 + 4x$ является парабола, ветви которой направлены вниз; $(0;0)$ и $(4;0)$ – точки пересечения графика с осью Ox; вершина параболы – точка $(2;4)$; $\left(x_0 = \frac{-4}{-2} = 2\right)$; $a_0 = -4 + 4 \cdot 2 = 4$.

Легко видеть, что при $-1 < a < 0$ прямые, параллельные оси Ox, будут пересекать два графика в четырех точках, то есть уравнение будет иметь 4 различных корня.

Найдем координаты точки A – точки пересечения графиков:

$$|x-1| - 1 = -x^2 + 4x \ \ (x > 1),$$

$$x - 2 = -x^2 + 4x,$$

$$x^2 - 3x - 2 = 0,$$

$$D = 9 + 4 \cdot 2 = 17.$$

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{2} < 1, \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2} > 1.$$

Если $x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$, то $a = \left|\frac{3+\sqrt{17}}{2} - 1\right| - 1 = \left|\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right| - 1 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$.

Итак, точка $A\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$ – точка пересечения графиков.

Следовательно, если $\frac{-1+\sqrt{17}}{2} < a < 4$ или $0 < a < \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, то графики также пересекаются в четырех точках, следовательно, уравнение 3.1 имеет ровно 4 различных корня.

Ответ: при $-1 < a < 0$, или при $0 < a < \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, или при $\frac{-1+\sqrt{17}}{2} < a < 4$.

Рассмотрим задачи, в которых переменная x легко выражается через параметр a, и поэтому, целесообразно рационализировать решение, используя параметрическую плоскость aOx.

Пример 3.11. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 - (2a+1)x + a^2 + a < 0, \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0 \end{cases} \quad \text{не имеет решений?}$$

Решение. Разложим квадратные трехчлены, записанные в левой части каждого неравенства, на множители. Получим систему, равносильную данной системе:

$$\begin{cases} (x-a)(x-(a+1)) < 0, \\ (x+1)\cdot(x-4) \geq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим параметрическую плоскость aOx, в которой построим графики $x = a$, $x = a+1$, $x = -1$, $x = 4$.

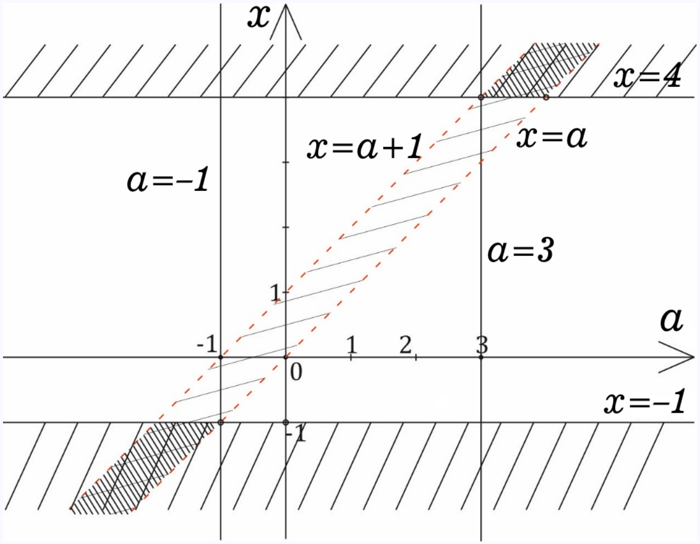

Рис. 3.12.

Штриховкой показано множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств.

Проведя вертикальные прямые $a = -1$ и $a = 3$, получим, что система будет иметь решения при $a < -1$ или при $a > 3$.

Следовательно, нет решений при всех a из промежутка $[-1; 3]$.

Ответ: при $-1 \le a \le 3$.

Пример 3.12. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(x+7)^2 + (a-6)^2 = |x - a + 13| + |x + a + 1|$ имеет единственный корень.

Решение. Решим уравнение, используя и аналитические рассуждения, и графическую модель задачи в параметрической плоскости aOx.

Найдем нули модулей $x = a - 13$ и $x = -a - 1$, и построим графики этих функций (рис. 3.13).

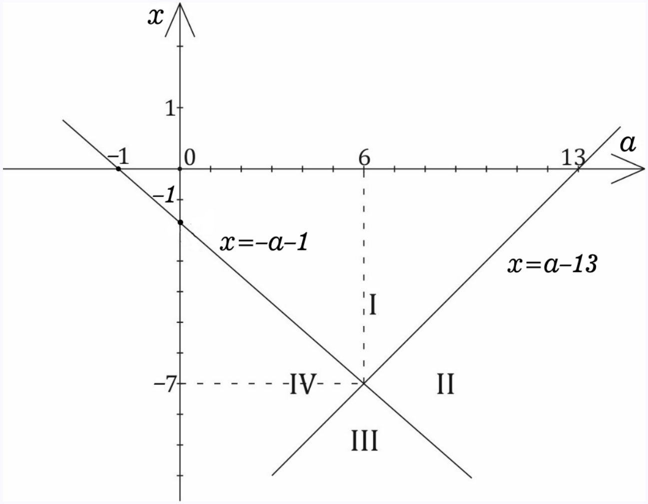

Рис. 3.13.

Графиками функций являются пересекающиеся прямые, разбивающие координатную плоскость на 4 области. Обозначим их: I, II, III и IV.

Рассмотрим знаки выражений, стоящих под знаком модулей в каждой из четырех областей. Для удобства составим таблицу 3.1.

Таблица 3.1.

Выражение под модулем	I	II	III	IV
$x - a + 13$	+	−	−	+
$x + a + 1$	+	+	−	−

Используя таблицу знаков, раскроем модули в каждой из областей.

I область:

$$(x+7)^2 + (a-6)^2 = x - a + 13 + x + a + 1,$$

$$(x+7)^2 + (a-6)^2 = 2x + 14,$$

$$x^2 + 14x + 49 + (a-6)^2 - 2x = 14,$$

$$x^2 + 12x + 36 + (a-6)^2 = 1,$$

$$(x+6)^2 + (a-6)^2 = 1.$$

Графиком полученного уравнения в I области является дуга окружности с центром в точке $(6; -6)$ и радиусом 1.

II область:

$$(x+7)^2+(a-6)^2=-x+a-13+x+a+1,$$

$$(x+7)^2+(a-6)^2=2a-12,$$

$$(x+7)^2+a^2-12a+36-2a=-12,$$

$$(x+7)^2+a^2-14a+49=1,$$

$$(x+7)^2+(a-7)^2=1.$$

Графиком этого уравнения во II области является дуга окружности с центром в точке $(7;-7)$ и радиусом 1.

III область:

$$(x+7)^2+(a-6)^2=-x+a-13-x-a-1,$$

$$(x+7)^2+(a-6)^2=-2x-14,$$

$$x^2+14x+49+2x+(a-6)^2=-14,$$

$$x^2+16x+64+(a-6)^2=1,$$

$$(x+8)^2+(a-6)^2=1.$$

Графиком полученного уравнения в III области является дуга окружности с центром в точке $(6;-8)$ и радиусом 1.

IV область:

$$(x+7)^2+(a-6)^2=x-a+13-x-a-1,$$

$$(x+7)^2+(a-6)^2=-2a+12,$$

$$(x+7)^2+a^2-12a+36+2a=12,$$

$$(x+7)^2+a^2-10a+25=1,$$

$$(x+7)^2+(a-5)^2=1.$$

Графиком полученного уравнения в IV области является дуга окружности с центром в точке $(5;-7)$ и радиусом 1.

Построим в каждой из областей полученные графики (рис.3.14).

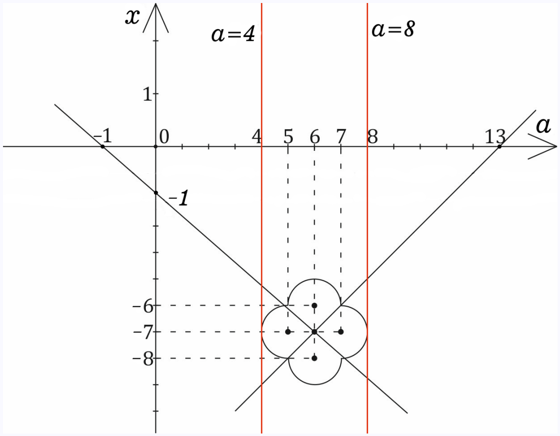

Рис. 3.14.

Легко видеть, что при $a=4$ или при $a=8$ уравнение имеет единственный корень.

Ответ: при $a=4$ или при $a=8$.

Пример 3.13. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3 \tag{4.1}$$

имеет корни, но ни один из них не принадлежит промежутку $(4; 19)$.

Решение (I способ). Используем комплексные аналитические рассуждения и графическую модель задачи (аналогично задаче 3.12).

Найдем нули модулей:

$$x - a^2 + a + 2 = 0; \quad x - a^2 + 3a - 1 = 0;$$

$$x = a^2 - a - 2; \qquad x = a^2 - 3a + 1.$$

Используем систему aOx, где a – независимая переменная, x – зависимая переменная.

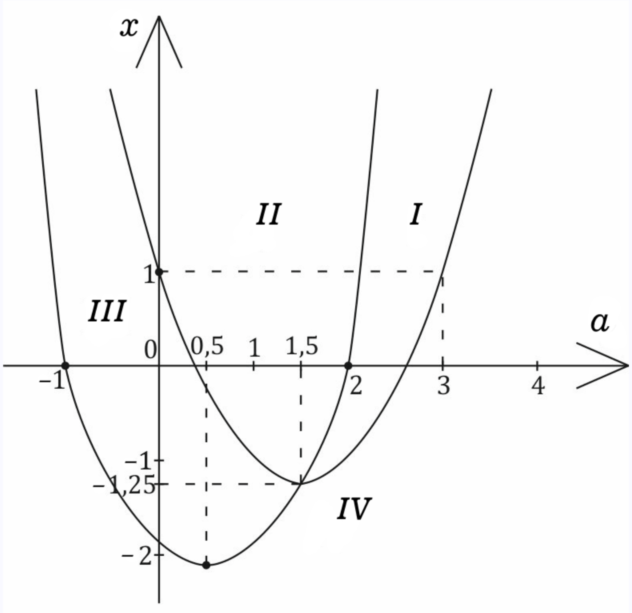

Рис. 3.15.

Графики разбивают координатную плоскость на 4 области. Рассмотрим знаки выражений, стоящих под знаком модуля в полученных областях.

Таблица 3.2.

Выражение, стоящее под знаком модуля	I	II	III	IV
$x - a^2 + a + 2$	$-$	$+$	$+$	$-$
$x - a^2 + 3a - 1$	$+$	$+$	$-$	$-$

Раскроем модули в каждой из областей.

I область:

$-x + a^2 - a - 2 + x - a^2 + 3a - 1 = 2a - 3,$

$2a - 3 = 2a - 3,$

$0 = 0$ – верное равенство для всех действительных значениях a и x.

II область:

$x - a^2 + a + 2 + x - a^2 + 3a - 1 = 2a - 3,$

$x = a^2 - a - 2.$

III область:

$x^2 - a^2 + a - 2 - x + a^2 - 3a + 1 = 2a - 3,$

$4a - 6 = 0;$

$a = 1,5.$

IV область:

$-x^2 + a^2 - a - 2 - x + a^2 - 3a + 1 = 2a - 3,$

$x = a^2 - 3a + 1.$

Рассмотрим графическую модель задачи.

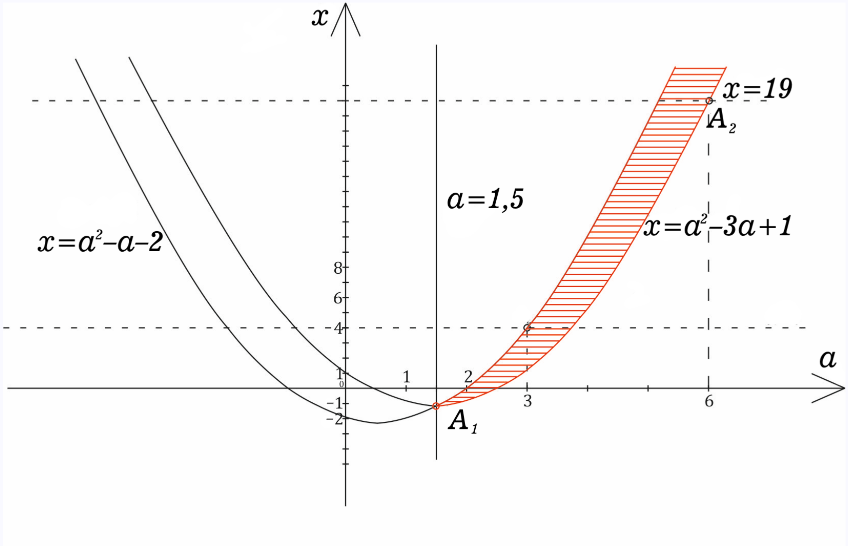

Рис. 3.16.

Заштрихованная область вместе с границей содержит точки, ординаты которых (x) и есть корни уравнения 4.1.

Найдем абсциссы точек A_1, A_2 и A_3.

A_1 – вершина параболы $x = a^2 - 3a + 1$, $a_0 = \frac{3}{2}$.

A_2 – точка пересечения прямой $x = 4$ и параболы $x = a^2 - a - 2$;

$$a^2 - a - 2 = 4; \;\; a^2 - a - 6 = 0; \;\; a = 3 \;\text{ или }\; a = -2.$$

Так как $a > 1,5$, то $a = 3$.

A_3 – точка пересечения прямой $x = 19$ и параболы $x = a^2 - 3a + 1$;

$$a^2 - 3a + 1 = 19;$$

$$a^2 - 3a - 18 = 0;$$

$$a = 6 \ \text{ или } \ a = -3.$$

Так как $a > 1,5$, то $a = 6$.

Таким образом, требование задачи выполняется при $1,5 \le a \le 3$ или при $a \ge 6$.

Ответ: при $1,5 \le a \le 3$ или при $a \ge 6$.

II способ. Заметим, что уравнение 4.1 имеет корни только в случае, когда $2a - 3 \ge 0$, то есть при $a \ge 1,5$.

Кроме того, легко видеть, что справедливо равенство $-(x - a^2 + a + 2) + (x - a^2 + 3a - 1) = 2a - 3$.

Поэтому, используя свойства модулей:

$$|a| + |b| = b - a \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 0; \\ b \ge 0, \end{cases}$$

Получим: $$\begin{cases} x - a^2 + a + 2 \le 0, \\ x - a^2 + 3a - 1 \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le a^2 - a - 2, \\ x \ge a^2 - 3a + 1. \end{cases}$$

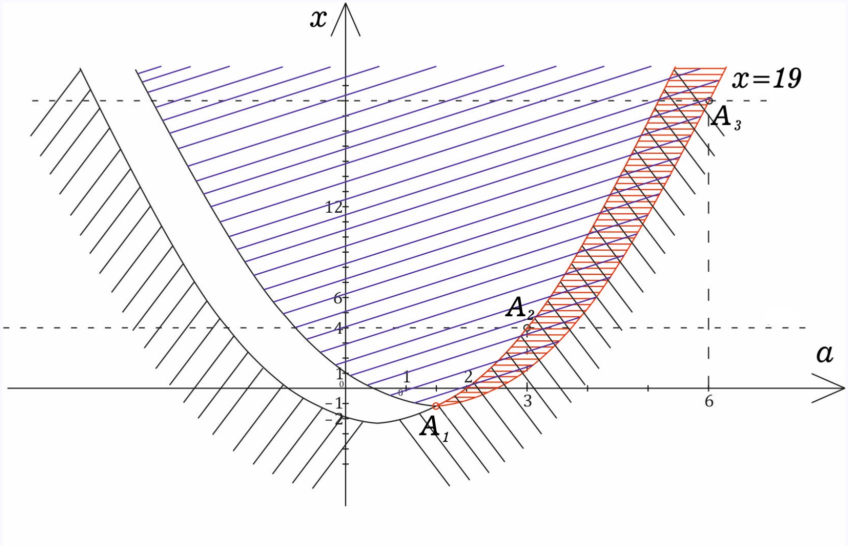

Рис. 3.17.

Построим графическую модель системы неравенств (рис. 3.17).

Заштрихованные области вместе с границей показывают множество решений неравенств. Пересечение заштрихованных областей есть множество решений системы неравенств.

Аналогично предыдущему способу решения найдем координаты точек A_1, A_2 и A_3.

$$A_1\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right); \quad A_2(3;4); \quad A_3(6;19).$$

Ответ: при $1,5 \le a \le 3$ или при $a \ge 6$.

III способ. Рассмотрим еще один способ решения уравнения, с нашей точки зрения, более рациональный.

Используя свойство модулей, решим систему неравенств

$$\begin{cases} 2a - 3 \ge 0, \\ x \le a^2 - a - 2, \\ x \ge a^2 - 3a + 1. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы имеем $a \ge 1,5$.

Если уравнение имеет корни, то должно выполняться условие $a^2 - 3a + 1 \le a^2 - a - 2$. (рис. 3.18).

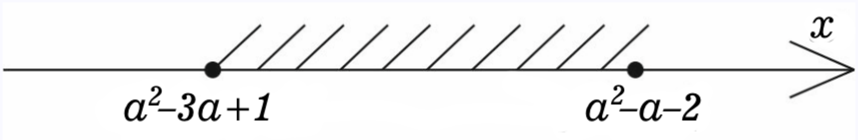

Рис. 3.18.

Для того чтобы выполнялось требование задачи (ни один из корней не принадлежит промежутку $(4; 19)$), точки с координатами 4 и 19 должны быть расположены так, как показано на рис. 3.19 или на рис. 3.20.

Следовательно, должно выполняться условие :

$$a^2 - a - 2 \le 4 \quad \text{или} \quad a^2 - 3a + 1 \ge 19;$$

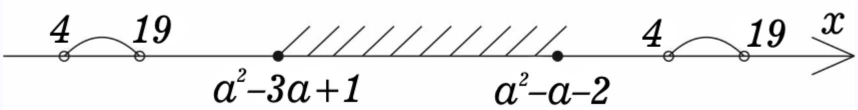

Рис. 3.19.

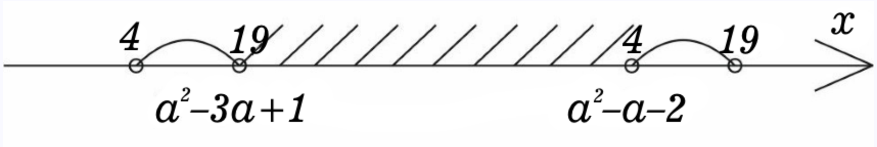

Рис. 3.20.

$$a^2 - a - 6 \leq 0 \quad \text{или} \quad a^2 - 3a - 18 \geq 0;$$

$$(a-3)(a+2) \leq 0 \quad \text{или} \quad (a-6)(a+3) \leq 0;$$

$$-2 \leq a \leq 3 \quad \text{или} \quad a \leq -1 \quad \text{или} \quad a \geq 6.$$

Учитывая условие $a \geq 1,5$, получим окончательно: $1,5 \leq a \leq 3$ или при $a \geq 6$.

Ответ: при $1,5 \leq a \leq 3$ или при $a \geq 6$.

Таким образом, рассмотренные задачи показывают, в каких случаях и почему удобно рассматривать систему координат aOx (если параметр легче выражается через переменную), в каких – систему xOa (если переменную удобно выразить через параметр).

ТЕМА 4
СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ С ПАРАМЕТРАМИ

4.1 Использование области определения и области значений функции в задачах с параметрами. Наибольшие и наименьшие значения функции. Метод оценки значений функции. Применение свойства ограниченности функций, входящих в структуру уравнений и неравенств

Определение 4.1. Закон (правило), по которому каждому значению x из множества чисел D ставится в соответствие одно определенное значение y, называется функцией, заданной на множестве D.

При этом x называется **независимой переменной** или **аргументом**, y – **зависимой переменной** или **функцией** от x, а множество D – областью определения функции.

Определение 4.2. Множество всех значений, которые может принимать функция, называется множеством значений функции.

Определение 4.3. Наименьшее число из множества значений функции называется **наименьшим значением функции**, а наибольшее число из этого множества – **наибольшим значением функции**.

Общий алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции f на отрезке $[a;b]$:

1) найти значения функции в тех точках интервала $(a; b)$, в которых ее производная обращается в нуль;

2) найти значения функции на концах отрезка $[a; b]$;

3) выбрать из найденных значений функции наибольшее и наименьшее значения.

Однако для решения более простых задач применение производной необязательно.

Приведем примеры.

а) $f(x) = 4\cos 3x$;

$-1 \leq cos3x \leq 1$;

$-4 \leq 4cos3x \leq 4$.

$E(f) = [-4; 4]$, следовательно, -4 – наименьшее; 4 – наибольшее значение.

б) $f(x) = 7 - 2cos^2x$;

$0 \leq cos^2x \leq 1$;

$0 \leq 2cos^2x \leq 2$;

$-2 \leq -2cos^2x \leq 0$;

$5 \leq 7 - 2cos^2x \leq 7$.

$E(f) = [5; 7]$, следовательно, 5 – наименьшее; 7 – наибольшее значение.

в) $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

$x_0 = \frac{4}{2} = 2$ – абсцисса вершины параболы;

$f(x_0) = f(2) = 4 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$ – ордината вершины параболы.

Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх, поэтому $f(x) \geq -1$, то есть наименьшее значение функции равно -1, а наибольшего значения не существует.

г) $f(x) = -2x^2 + 6x - 1$.

$x_0 = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$;

$f(x_0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -2 \cdot \frac{9}{4} + 6 \cdot \frac{3}{2} - 1 = -\frac{9}{2} + \frac{18}{2} - \frac{2}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$.

Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вниз, поэтому $f(x) \leq 3,5$, то есть наибольшее значение функции равно 3,5, а наименьшего значения не существует.

При решении этих четырех примеров использовался метод оценки значений функции.

Рассмотрим примеры задач с параметрами, при решении которых используется анализ области определения и множества значений функции.

Пример 4.1. смПри каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1} = a - \sqrt{3-x}$ имеет хотя бы один корень?

Решение (I способ).

Найдем область определения уравнения:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ 3 - x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1, \\ x \leq 3; \end{cases} \quad -1 \leq x \leq 3.$$

Выпишем все целые числа, входящие в область определения: -1; 0; 1; 2; 3.

Проверим каждое из них, подставив в исходное уравнение.

Если $x = -1$, то $a = 2$; если $x = 0$, то $a = 1 + \sqrt{3}$; если $x = 1$, то $a = 2\sqrt{2}$; если $x = 2$, то $a = 1 + \sqrt{3}$; если $x = 3$, то $a = 2$.

Ответ: при $a = 2$, $a = 2\sqrt{2}$, $a = 1 + \sqrt{3}$.

Рассмотрим II способ решения данной задачи, связанный с построением графической модели уравнения.

Перепишем уравнение в виде $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = a$, и построим графики функций $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$ на области определения $[-1; 3]$ и $g(x) = a$ – семейство прямых, параллельных оси Ox (рис. 4.1).

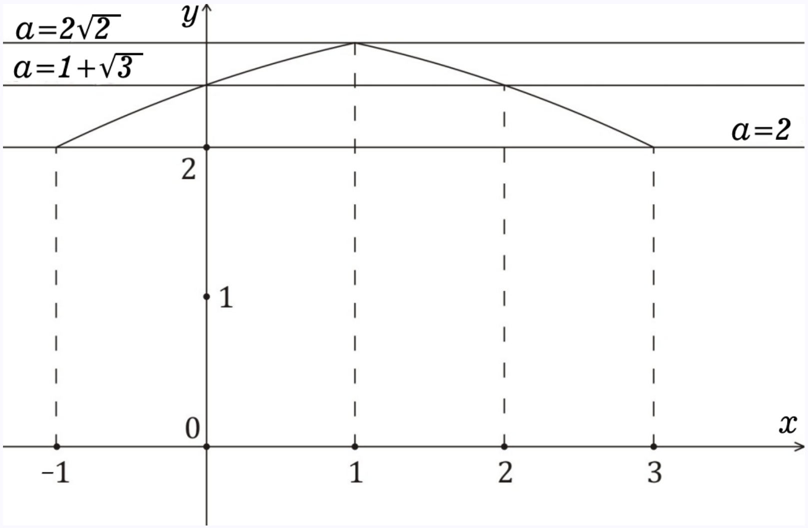

Рис. 4.1.

Из графика легко видеть, что уравнение имеет целые корни при $a = 2$, при $a = 2\sqrt{2}$, при $a = 1 + \sqrt{3}$.

Пример 4.2. При каких значениях параметра a функция $f(x) = \sqrt{a - x(2a+4) + (5a+4)\cdot x^2}$ определена при всех действительных значениях x?

Решение. Для нахождения области определения функции надо решить неравенство $a - x(2a+4) + (5a+4)\cdot x^2 \geq 0$.

Рассмотрим возможные случаи:

1. Если $a = -\frac{4}{5}$, то неравенство примет вид: $0\cdot x^2 - x(-\frac{8}{5}+4) - \frac{4}{5} \geq 0$, отсюда $x \leq -\frac{1}{3}$, то есть неравенство справедливо не при всех действительных значениях x.

2. Если $a \neq -\frac{4}{5}$, то функция будет определена при всех действительных значениях x, если выполняется условие

$$\begin{cases} 5a+4>0, \\ D \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 5a > -4, \\ (2a+4)^2 - 4\cdot a\cdot(5a+4) \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -\frac{4}{5}, \\ a^2 \geq 1; \end{cases} \quad a \geq 1.$$

Ответ: при $a \geq 1$.

Пример 4.3. Найдите все значения параметра a, при которых в область определения функции $y = \lg\left(a^{ax-2} - a^x\right)$ входят числа 13, 15, 17, но не входят числа 3, 5, 7.

Решение. По определению логарифма $a^{ax-2} - a^x > 0$, то есть $a^{ax-2} > a^x$.

Рассмотрим возможные случаи:

1. Если $a = 1$, то $D(y) = \varnothing$.

2. Если $0 < a < 1$, тогда функция $y = a^x$ – убывающая и, следовательно, $ax - 2 < x$, то есть $x(a-1) < 2$.

Учитывая, что $0 < a < 1$, имеем $a - 1 < 0$, тогда $x > \frac{2}{a-1}$, то есть $D(y) = \left(\frac{2}{a-1}; +\infty\right)$. Но в этот промежуток входят все положительные числа, в том числе и 3, и 5, и 7, что противоречит требованию задачи. Поэтому найденные значения параметра a не удовлетворяют условию задачи.

3. Если $a > 1$, тогда, учитывая возрастание показательной функции, получим $ax - 2 > x$, то есть $(a-1) \cdot x > 2$, откуда $x > \frac{2}{a-1}$. Значит, $D(y) = \left(\frac{2}{a-1}; +\infty\right)$. На рисунке 4.2 показано, где на числовой прямой должно располагаться число $\frac{2}{a-1}$.

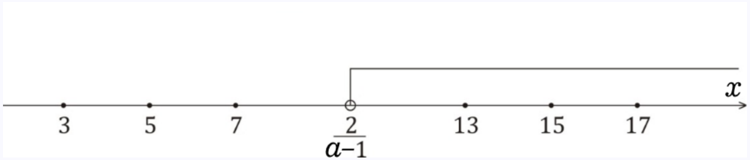

Рис. 4.2.

Таким образом, для выполнения требования задачи надо, чтобы выполнялось условие $7 \le \frac{2}{a-1} < 13$; отсюда $7a - 7 \le 2 < 13a - 13$ (так как

$a - 1 > 0$);

$$\begin{cases} 7a \le 9, \\ 13a > 15;) \end{cases} \quad \begin{cases} a \le \frac{9}{7}, \\ a > \frac{15}{13}. \end{cases}$$

Ответ: при $\frac{15}{13} < a \le \frac{9}{7}$.

Пример 4.4. Из области определения функции $y = log_9\left(a^{\frac{7x+3}{x-3}} - a^a\right)$ выписали все целые положительные числа, и нашли их сумму (S). Найдите все значения параметра, при которых такая сумма больше 9, но меньше 16.

Решение. Графиком дробно-линейной функции
$g(x) = \frac{7x+3}{x-3} = \frac{7x-21+24}{x-3} = 7 + \frac{24}{x-3}$ является гипербола.
По условию $x > 0$.
Если $0 < x < 3$, то $g(x) < 0$. При возрастании x функция $g(x) = 7 + \frac{24}{x-3}$ монотонно убывает, и значение функции стремится к 7 (рис. 4.3).

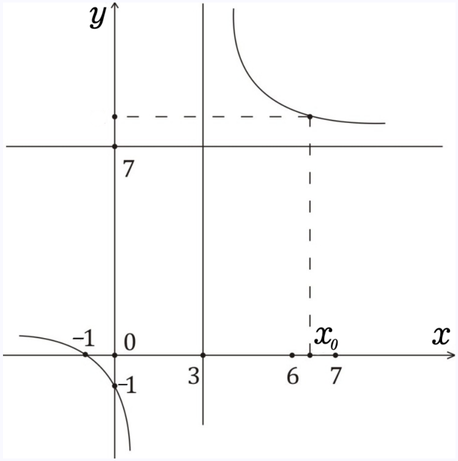

Рис. 4.3.

По определению логарифма $a^{\frac{7x+3}{x-3}} > a^a$.

1. Если $a = 1$, то неравенство не имеет решений.

2. Если $0 < a < 1$ (показательная функция с основанием a убывает), то $\frac{7x+3}{x-3} < a$.

Если $x > 3$, то $\frac{7x+3}{x-3} > 7 > a$, то есть неравенство $\frac{7x+3}{x-3} < a$ не выполняется.

Если $x < 3$, то в интервале $(0; 3)$ целые числа – только 1 и 2, и их сумма равна $3 < 9$, то есть не выполняется требование задачи.

3. Если $a > 1$, то $\frac{7x+3}{x-3} > a$.

Если $a \leq 7$, то любое число, большее 3, является его решением и указанную сумму S найти нельзя.

Если $a > 7$, то множество его положительных решений – это промежуток $(3; x_0)$, где $a = g(x_0)$ (рис. 4.3).

Найдем суммы натуральных решений, начиная с 4:

$$4 + 5 = 9,$$

$$4 + 5 + 6 = 15,$$

$$4 + 5 + 6 + 7 = 22, \text{ и т.д.}$$

Указанная сумма $9 < S < 16$, только если число 6 принадлежит интервалу $(3; x_0)$, а число 7 этому интервалу не принадлежит, то есть $6 < x_0 \le 7$. Так как функция $g(x) = \frac{7x+3}{x-3}$ убывает на отрезке $[6; 7]$, то $g(7) \le g(x_0) < g(6)$, или $\frac{7\cdot 7+3}{7-3} \le a < \frac{7\cdot 6+3}{6-3}$. Отсюда легко найти, что $13 \le a < 15$.

Ответ: при $13 \le a < 15$.

Пример 4.5. Найдите все значения параметра a, при которых множество значений функции $f(x) = 0,25^{x^2+2x+a^2-3a}$ не пересекается с промежутком $[4; +\infty)$.

Решение. Выполним следующие преобразования:

$f(x) = 0,25^{x^2+2x+1} \cdot 0,25^{a^2-3a-1}$;

$f(x) = 0,25^{(x+1)^2} \cdot 0,25^{a^2-3a-1}$.

Заметим, что так как $(x+1)^2 \ge 0$ при всех действительных значениях x, то $0 < 0,25^{(x+1)^2} \le 1$, поэтому $0 < f(x) \le 0,25^{a^2-3a-1}$.

Следовательно, областью значений функции $f(x)$ является промежуток $(0; 0,25^{a^2-3a-1}]$.

Для выполнения требования задачи промежутки надо расположить так, как показано на рисунке 4.4.

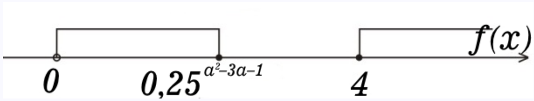

Рис. 4.4.

Поэтому должно выполняться неравенство:

$0,25^{a^2-3a-1} < 4;$

$0,25^{a^2-3a-1} < 0,25^{-1};$

$a^2 - 3a - 1 > -1;$

$a^2 - 3a > 0;$

$a(a-3) > 0;$

$a < 0$ или $a > 3.$

Ответ: при $a < 0$ или при $a > 3$.

Рассмотрим задачу, в которой используется свойство ограниченности функции.

Пример 4.6. Найдите все такие значения параметра a, при которых неравенство $\left|\frac{x^2+2ax+a^2+9}{x+a}\right| \le 2x + 5 - x^2$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \left|\frac{x^2+2ax+a^2+9}{x+a}\right|$ и найдем множество ее значений. Для этого выполним необходимые преобразования.
$\left|\frac{x^2+2ax+a^2+9}{x+a}\right| = \left|\frac{(x+a)^2+9}{x+a}\right| = \left|x+a+\frac{9}{x+a}\right| = 3\cdot\left|\frac{x+a}{3}+\frac{3}{x+a}\right|.$

Заметим, что $\left|\frac{x+a}{3}+\frac{3}{x+a}\right| \geq 2$ (согласно неравенству Коши), поэтому $f(x) \geq 6$.

Рассмотрим функцию $g(x) = -x^2+2x+5$ и найдем ее наибольшее значение:

$x_0 = \frac{-2}{-2} = 1, \quad g(x_0) = g(1) = -1+2+5 = 6;$

Отсюда $g(x) \leq 6$.

Следовательно, исходное неравенство может иметь решения, если имеет решения система

$$\begin{cases} 3\cdot\left|\frac{x+a}{3}+\frac{3}{x+a}\right| = 6, \\ -x^2+2x+5 = 6. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим, что $x = 1$. Подставим найденное значение x в первое уравнение системы, получим $a = 2$ или $a = 4$.

Ответ: при $a = 2$ или $a = 4$.

Пример 4.7. При каких значениях параметра a функция $f(x) = \frac{x^2-2ax+9}{(x-1)(x-3)}$ имеет с осью Ox только одну общую точку?

Решение. Для нахождения общих точек функции с осью Ox решим уравнение $\frac{x^2-2ax+9}{(x-1)(x-3)} = 0$, которое равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 2ax + 9 = 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

1. Найдем все значения параметра a, при которых корнем уравнения является число 1:

$1^2 + 2a \cdot 1 + 9 = 0;$

$2a = 10;$

$a = 5.$

Если $a = 5$, то уравнение примет вид $x^2 - 10x + 9 = 0$.

По теореме, обратной теореме Виета, получим, что $x_1 = 1$; $x_2 = 9$.

Так как число 1 не входит в область определения функции, то уравнение имеет единственный корень 9.

2. Найдем все значения параметра a, при которых корнем уравнения является число 3:

$3^2 - 2 \cdot a \cdot 3 + 9 = 0;$

$6a = 18;$

$a = 3.$

Если $a = 3$, то уравнение имеет вид $x^2 - 6ax + 9 = 0$, откуда $x_1 = x_2 = 3$.

Но 3 не входит в область определения функции, поэтому при $a = 3$ уравнение не имеет корней.

3. Найдем все значения параметра, при которых уравнение $x^2 - 2ax + 9 = 0$ имеет единственный корень.

$D = 4a^2 - 4 \cdot 9 = 4(a^2 - 9) = 4(a - 3)(a + 3)$.

$D = 0$ при $a = 3$ или при $a = -3$ (3 не входит в область определения).

Ответ: при $a = -3$ или при $a = 5$.

Рассмотрим примеры задач, при решении которых используется свойство четности функций и симметричности решений.

Пример 4.8. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} a \cdot (x^4 + 1) = y + 1 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$ имеет единственное решение?

Решение. Заметим, что если $(x_0; y_0)$ – решение системы, то и $(-x_0; y_0)$ тоже является решением.

Поэтому необходимым условием существования единственности решения является условие $x = 0$.

Пусть x=0, тогда имеем: $\begin{cases} a = y + 1, \\ y^2 = 1. \end{cases}$

Отсюда $a = 0$ или $a = 2$.

Кафедра методики преподавания математики и информатики

1. Если $a = 0$, то система примет вид: $\begin{cases} y + 1 - |x| = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} |x| = y + 1, \\ y(y + 1) = 0. \end{cases}$

Легко видеть, что данная система имеет три решения $(1; 0)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$, поэтому значение параметра $a = 0$ не удовлетворяет требованию задачи.

2. Если $a = 2$, то система примет вид: $\begin{cases} 2x^4 + |x| = y - 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Заметим, что из первого уравнения системы следует, что $y \geq 1$, а из второго – что $y \leq 1$. Следовательно, $y = 1$.

Подставим найденное значение $y = 1$ в систему, получим

$$\begin{cases} 2x^4 + |x| = 0, \\ x^2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x = 0$.

Следовательно, $(0; 1)$ – единственное решение.

Ответ: при $a = 2$.

Пример 4.9. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 2a \cdot \sin(\cos x) + 2 = 0$ имеет единственный корень?

Решение. Заметим, что если x_0 – корень уравнения, то $-x_0$ – также корень этого уравнения. Поэтому, необходимое условие существования единственного корня – это условие $x = 0$.

Если $x = 0$, то уравнение примет вид $-2a \cdot \sin(\cos 0) + 2 = 0$, откуда $a \cdot \sin 1 = 1$, следовательно, $a = \frac{1}{\sin 1}$.

Проверим найденное значение параметра a.

Если $a = \frac{1}{\sin 1}$, то исходное уравнение примет вид:

$x^2 + 2 = \frac{2}{\sin 1} \cdot \sin(\cos x)$.

Рассмотрим функцию $f(t) = \sin t$, где $t \in [-1; 1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$f(t)$ – возрастающая на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, следовательно, так как $\cos x \leq 1$, то $\sin(cosx) \leq \sin 1$.

Отсюда $\frac{\sin(cosx)}{\sin 1} \leq \frac{2\sin 1}{\sin 1} = 2$.

Так как $x^2 + 2 \geq 2$, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 2 = 2, \\ \dfrac{\sin(cosx)}{\sin 1} = 2. \end{cases}$$

Единственное решение этой системы $x = 0$.

Ответ: при $a = \frac{1}{\sin 1}$.

При решения ряда задач с параметрами используется и такое свойство функции как монотонность.

Напомним некоторые свойства монотонных функции, которые будут использоваться нами при решении задач.

Основные свойства монотонных (непрерывных) функций:

Теорема 4.1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастают (убывают) на множестве M, то функция $y = f(x) + g(x)$ также возрастает (убывает) на этом множестве M.

Теорема 4.2. Если функция $y = f(x)$ монотонна, то уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня (то есть монотонная функция принимает каждое свое значение единственный раз).

Теорема 4.3. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ возрастают (убывают) на множестве M, причем $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$, то функция $y = f(x) \cdot g(x)$ также возрастает (убывает) на этом множестве M.

Пример 4.10. Решите уравнение $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x - a} = \sqrt[3]{a}$.

Решение. Заметим, что функции $y(x) = \sqrt[3]{x}$ и $g(x) = \sqrt{x - a}$ – возрастающие при $x \geq a$, следовательно, и функция $p(x) = y(x) + g(x)$ – также возрастающая при $x \geq a$ (по теореме 4.1).

Функция $q(x) = \sqrt[3]{a}$ – постоянная.

Следовательно, исходное уравнение имеет не более одного корня (по теореме 4.2).

Легко видеть, что a – искомый корень.

Ответ: a – единственный корень при всех действительных значениях параметра.

Пример 4.11. Для каждого значения параметра a определите количество корней уравнения $\sqrt{3x-5} = a - \sqrt{3x+11}$.

Перепишем уравнение в виде: $\sqrt{3x-5} + \sqrt{3x+11} = a$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{3x-5} + \sqrt{3x+11}$. Она возрастает (по теореме 4.1) на области определения – промежутке $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$. Поэтому, уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня (по теореме 4.2).

Найдем множество значений функции $f(x)$. Так как $f\left(\frac{5}{3}\right) = 4$, то $f(x) \geq 4$, и уравнение при $a \geq 4$ имеет единственный корень, а при $a < 4$ уравнение не имеет корней.

Ответ: единственный корень при $a \geq 4$, не имеет корней при $a < 4$.

Пример 4.12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+a} - \sqrt{y+b} = 1, \\ \sqrt{y+a} - \sqrt{x+b} = 1. \end{cases}$$

Решение. Вычтем из первого уравнения второе (почленно), получим:

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{y+b} - \sqrt{y+a} + \sqrt{x+b} = 0,$$

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{y+a} + \sqrt{y+b}.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = \sqrt{t+a} + \sqrt{t+b}$. Она возрастающая, причем $f(t) = f(y)$, следовательно, $x = y$.

Отсюда следует, что $\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b} = 1$.

Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x \geq -a, \\ x \geq -b, \\ x + a = 1 + x + b + 2 \cdot \sqrt{x+b}; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq b+1, \\ x \geq -b, \\ 2\sqrt{x+b} = a - b - 1. \end{cases}$$

Из уравнения получим $x = \frac{(a-b-1)^2}{4} - b$.

Заметим, что $x = \frac{(a-b-1)^2}{4} - b \geq -b$.

Ответ: $x = y = \frac{(a-b-1)^2}{4} - b$, если $a \geq b+1$; нет решений, если $a < b+1$.

Пример 4.13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -3x^2 + 6x - a$ на отрезке $[-1; 3]$.

Решение. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдем абсциссу вершины параболы:

$x_0 = -\frac{b}{2a}$; $x_0 = \frac{-6}{2\cdot(-3)} = 1$.

Так как $1 \in [-1; 3]$, то наибольшее значение функции на отрезке равно значению функции в точке 1.

$f(1) = -3 + 6 - a = 3 - a$ – наибольшее значение функции.

Найдем значения функции на концах отрезка:

$$f(-1) = -3 - 6 - a = -9 - a;$$

$$f(3) = -27 + 18 - a = -9 - a;$$

Так как $f(-1) = f(3) = -9 - a$, то это и есть наименьшее значение функции.

Рассмотренные в лекции примеры решения задач с параметрами связаны с исследованием области определения и множества значений функций, с использованием таких свойств функций как непрерывность, монотонность, четность, нечетность.

ТЕМА 5
ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

5.1 Задачи, связанные с понятием касательной к графику функции в точке. Использование геометрического смысла производной при решении задач с параметрами

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Геометрический смысл производной: угловой коэффициент касательной к графику функции в точке x_0 равен производной этой функции в точке x_0.

Другими словами: производная функции в точке x_0 есть тангенс угла наклона к положительному направлению оси Ox касательной, проведенной к графику этой функции в точке $(x_0; f(x_0))$.

Задачи с параметрами, связанные с понятием «касательная» можно условно разделить на две группы:

1) задачи, в которых понятие «касательная» используется в явном виде (написать уравнение касательной к графику данной функции; выяснить, является ли данная прямая касательной к графику некоторой

функции; найти площадь фигуры, ограниченной касательной, графиком функции и осями координат и другие);

2) задачи, в которых понятие «касательная» используется в неявном виде (нахождение количества корней уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств).

Рассмотрим более подробно задачи первой группы.

Пример 5.1. Касательная к параболе $y = x^2 + ax + 4$ проходит через начало координат. Найдите все значения параметра a, при которых абсцисса точки касания положительна, а ордината равна 6.

Решение. Запишем уравнение касательной в общем виде:
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, где $(x_0; f(x_0))$ – координаты точки касания.
Имеем $f(x_0) = x_0^2 + ax_0 + 4$;
$f'(x) = 2x + a$;
$f'(x_0) = 2x_0 + a$.

Так как касательная проходит через начало координат, то координаты точки $O(0;0)$ удовлетворяют уравнению касательной.

Подставив все найденные значения в уравнение касательной, получим:

$$0 = x_0^2 + ax_0 + 4 + (2x_0 + a) \cdot (0 - x_0);$$

$$x_0^2 - 4 = 0;$$

$$x_0 = 2 \quad \text{или} \quad x_0 = -2.$$

Так как по условию задачи $x_0 > 0$, то $x_0 = 2$.
Найдем $f(x_0) = f(2) = 6$.
Следовательно, $6 = 2^2 + a \cdot 2 + 4$;

$$2a = -2;$$

$$a = -1.$$

Ответ: при $a = -1$.

Пример 5.2. При каких значениях параметра a график функции $y = \sqrt[3]{6x+a}$ касается прямой $y = 2x$.

Решение. Так как прямая $y = 2x$ – касательная к графику функции $y = \sqrt[3]{6x+a}$, то согласно геометрическому смыслу производной $k = \operatorname{tg} \alpha = y'(x_0) = 2$, где x_0 – абсцисса точки касания, α – угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox.

$$y'(x) = \left((6x+a)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot (6x+a)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6 = \frac{2}{(y = \sqrt[3]{6x+a})^2};$$

$$y'(x_0) = \frac{2}{(\sqrt[3]{6x_0+a})^2} = 2; \quad \text{отсюда} \quad (\sqrt[3]{6x_0+a})^2 = 1;$$

$$\text{следовательно,} \quad 6x_0 + a = 1 \quad \text{или} \quad 6x_0 + a = -1;$$

$$y_0 = \frac{1-a}{3} \quad \text{или} \quad y = \frac{-1-a}{3}.$$

Подставим координаты $(x_0; y_0)$ в формулу $y = \sqrt[3]{6x + a}$, получим:

$$\frac{1-a}{3} = \sqrt[3]{6 \cdot \frac{1-a}{6} + a} \quad \text{или} \quad \frac{-1-a}{3} = \sqrt[3]{6 \cdot \frac{-1-a}{6} + a};$$

Отсюда $a = -2$ или $a = 2$.

Ответ: при $a = -2$ или $a = 2$.

Пример 5.3. Найдите все значения параметра a, при которых касательная к графику функции $y = a - x^2$ отсекает от первой координатной четверти равнобедренный треугольник площади $S = \frac{9}{32}$.

Решение. Запишем уравнение касательной в точке $M(x_0; y_0)$: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, где $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, α – угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox.

Так касательная отсекает равнобедренный треугольник, то $\alpha = 135°$, следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = -1$.

С другой стороны, $f'(x) = -2x$; $f'(x_0) = -2x_0$; то есть $-2x_0 = -1$; $x_0 = 0,5$ – абсцисса точки касания.

При $x_0 = 0,5$ уравнение касательной примет вид:

$y = (a - 0,25) + (-1) \cdot (x - 0,5)$;

$y = -x + a + 0,25$ – уравнение касательной.

Эта прямая пересекает ось Ox в точке $A(a + 0,25; 0)$, а ось Oy – в точке $B(0; a + 0,25)$.

Следовательно, $a > -0,25$ (так как ось положительная).

Тогда $S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot (a+0,5)^2 = \frac{9}{32}$;
$(a+0,5)^2 = \frac{9}{16}$;
$a + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ или $a + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$,
$a = \frac{1}{2}$ или $a = -1$ – не удовлетворяет требованию.
Ответ: при $a = \frac{1}{2}$.

Пример 5.4. Найдите все значения параметра a, при которых хорда параболы $y = -a^2x^2 + 5ax - 4$ касается кривой $f(x) = \frac{1}{1-x}$ в точке $x = 2$ и делится этой точкой пополам.

Решение. Составим уравнение касательной, используя геометрический смысл производной.

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; \quad f'(x_0) = 1; \quad f(2) = -1.$$

Следовательно, уравнение касательной примет вид:

$$y = -1 + 1 \cdot (x-2);$$

$$y = -1 + x - 2;$$

$$y = x - 3.$$

Пусть x_1 и x_2 – абсциссы концов хорды параболы $y = -a^2x^2+5ax-4$. Тогда эти значения переменной x будут корнями уравнения $-a^2x^2 + 5ax - 4 = x - 3$.

Поскольку $x = 2$ является абсциссой середины хорды, то $\frac{x_1+x_2}{2} = 2$, то есть $x_1 + x_2 = 4$.

Если уравнение $a^2x^2+x(1-5a)+1 = 0$ имеет корни, то $x_1+x_2 = \frac{5a-1}{a^2}$ (обратите внимание, что случаи $a = 0$ и $D = 0$ можно не рассматривать в силу условия задачи).

Поэтому искомые значения параметра являются решениями системы

$$\begin{cases} (1-5a)^2 - 4a^2 > 0, \\ \frac{5a-1}{a^2} = 4. \end{cases}$$

Решим систему: $\begin{cases} 1 - 10a + 25a^2 - 4a^2 > 0, \\ 4a^2 - 5a + 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 21a^2 - 10a + 1 > 0, \\ \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = \frac{1}{4}; \end{array} \right. \end{cases}$

отсюда $a = 1$.

Ответ: при $a = 1$.

Пример 5.5. Найдите все значения параметра a, при которых числа x_1; $\sqrt{a^2+3}$; x_2 образуют геометрическую прогрессию, где x_1 и x_2 – абсциссы точек графика функции $f(x) = x^3+7x^2+(2-9a)\cdot x$, в которых касательные к графику наклонены к оси абсцисс под углом $135°$.

Решение. По свойству геометрической прогрессии:

$$x_1 \cdot x_2 = a^2 + 3. \tag{1}$$

Используем геометрический смысл производной:

$$f'(x_1) = \operatorname{tg} 135^\circ = -1;$$

$$f'(x_2) = -1;$$

Найдем $f'(x) : f'(x) = 3x^2 + 14x + (2 - 9a)$;
Решим уравнение $3x^2 + 14x + 2 - 9a = -1$.

$$3x^2 + 14x + 3 - 9a = 0.$$

Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 1 - 3a, \\ x_1 + x_2 = -\frac{14}{3}. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы и уравнения (1) получим:

$$a^2 + 3 = 1 - 3a;$$

$$a^2 + 3a + 2 = 0;$$

$$a = -1 \quad \text{или} \quad a = -2.$$

Найдем дискриминант (D) квадратного уравнения:

$$D = 14^2 - 4 \cdot 3(3 - 9a) = 196 - 36 + 108a = 160 + 108a.$$

Существование корней уравнения определяется условием:

$$160 + 108a \geq 0;$$
$$108a \geq -160;$$
$$a \geq -\frac{40}{27}.$$

Данному требованию удовлетворяет только одно найденное значение параметра $a = -1$.

Ответ: при $a = -1$.

Пример 5.6. Найдите все значения параметров b и c, при которых прямая, заданная уравнением $y = 5x + 3$, является касательной к графику функции $y = x^2 + bx + c$ в точке $A(-2; -7)$.

Решение. Так как прямая $y = 5x+3$ – касательная к параболе в точке $A(-2; -7)$, то, используя геометрический смысл производной, запишем:

$$5 = k = y'(-2), \quad \text{тогда} \quad y' = 2x + b;$$
$$y'(-2) = -4 + b; \quad -4 + b = 5; \quad b = 9.$$

Значение параметра c найдем из условия, что координаты точки A удовлетворяют уравнению $y = x^2 + bx + c$, то есть

$-7 = (-2)^2 + 9 \cdot (-2) + c$, откуда $c = 7$.

Ответ: при $b = 9$, $c = 7$.

Рассмотрим задачи второго типа, в которых понятие «касательная» используется для рационального решения уравнений и неравенств.

Пример 5.7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{2x+a} = x+3$ имеет единственный корень.

Решение. Воспользуемся графической иллюстрацией задачи (рис. 5.1). Графиком функции $y = x + 3$ является прямая, пресекающая координатные оси в точках $(-3; 0)$ и $(0; 3)$.

Графиком функции $y = \sqrt{2x+a}$ для различных значений параметра a является семейство ветвей парабол (так называемые полупараболы) вершины которых находятся в точке $(-\frac{a}{2}; 0)$, а сами ветви расположены выше оси Ox. На рисунке 5.1 представлены три такие полупараболы.

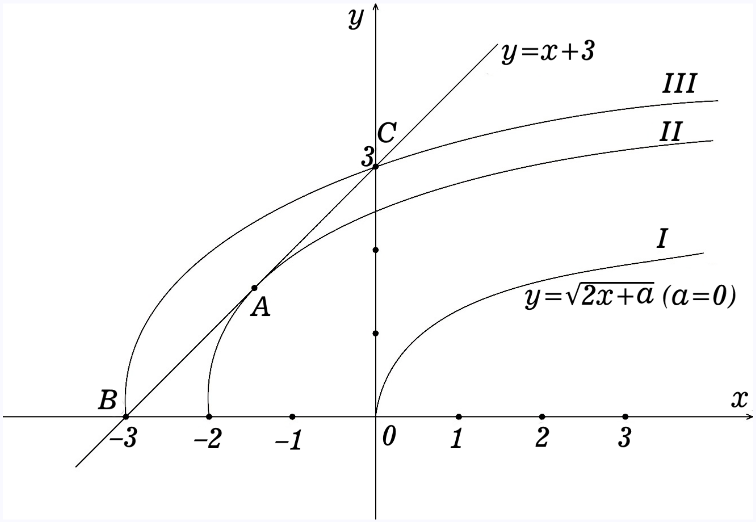

Рис. 5.1.

При изменении значений параметра a происходит сдвиг графика вправо (если $a < 0$) или влево (если $a > 0$).

Кривая I не имеет с прямой $y = x + 3$ общих точек, кривая II имеет с этой прямой одну общую точку A – точку касания. Кривая III имеет с прямой $y = x + 3$ две общие точки: B и C.

Если сдвигать полупараболу левее (значения параметра a увеличиваются) то она будет пересекаться с прямой только в одной точке.

Найдем значение параметра, соответствующее точке $B : x = -3$ и $2x + a = 0$; отсюда $a = 6$. Следовательно, при $a > 6$ данное уравнение будет иметь единственный корень.

Найдем значение параметра, соответствующее точке A. Так как эта точка – точка касания, то есть прямая $y = x+3$ – касательная к графику функции $y = \sqrt{2x + a}$, то $y'(x_0) = k = 1$, где x_0 – абсцисса точки A.

Имеем: $\frac{2}{2\sqrt{2x_0+a}} = 1$; отсюда $\sqrt{2x_0 + a} = 1$ и $x_0 + 3 = 1$, следовательно, $x_0 = -2$ – абсцисса точки A.

Поэтому $\sqrt{-4 + a} = 1$;

$-4 + a = 1$;

$a = 5$.

Ответ: при $a = 5$ или при $a > 6$.

Пример 5.8. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x} = x + a$ имеет единственный корень?

Решение. Построим графики функций $g(x) = \sqrt{x}$ и $y(x) = x + a$ (рис.5.2).

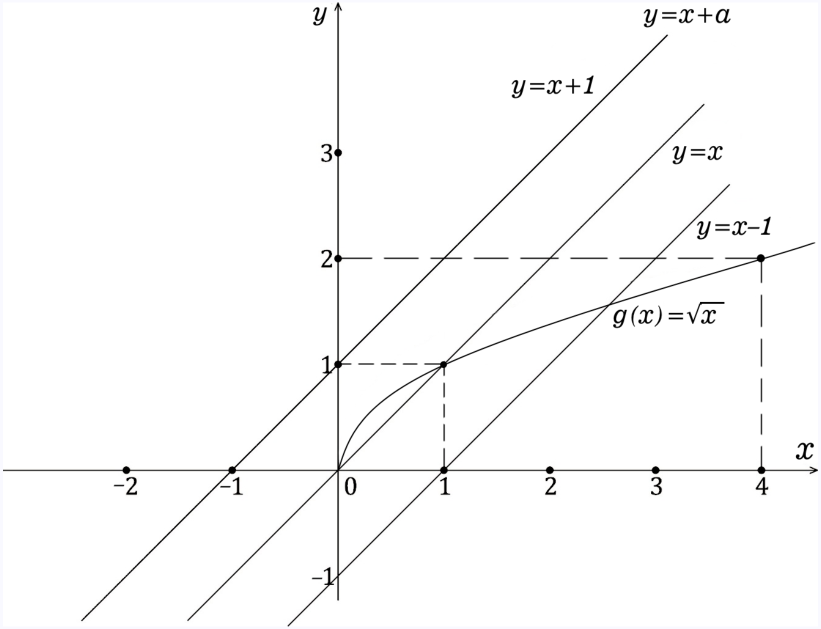

Рис. 5.2.

Графиком функции $y(x) = x + a$ является семейство прямых, параллельных прямой $y = x$.

При $a = 0$ уравнение имеет 2 корня, поэтому при $a < 0$ (сдвиг графика вниз вдоль оси Oy на $|a|$ единиц) уравнение будет иметь единственный корень.

Уравнение также будет иметь единственный корень, если прямая $y = x + a$ будет касательной к графику функции $g(x) = \sqrt{x}$, причем, так как $\alpha = 45^\circ$, то $\operatorname{tg}\alpha = 1$; отсюда $g'(x_0) = 1$; $g'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 1$; $x_0 = \frac{1}{4}$.

Если $x_0 = \frac{1}{4}$, то $g(x_0) = \frac{1}{2}$.

Имеем: $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + a$; $\quad a = \frac{1}{4}$.

Ответ: при $a = \frac{1}{4}$ или при $a < 0$.

Пример 5.9. При каком наименьшем натуральном значении параметра a уравнение $x^3 + 3x^2 - 45x + a = 0$ имеет ровно один корень?

Решение. Перепишем уравнение в виде $x^3 + 3x^2 - 45x = -a$ и построим графики функций $y = x^3 + 3x^2 - 45x$ и $y = -a$.

$$y' = 3x^2 + 6x - 45 = 3(x^2 + 2x - 15) = 3(x + 5)(x - 3)$$

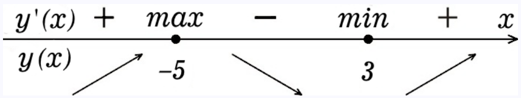

Рис. 5.3.

Найдем значения функции в точках максимума и минимума:

$$y(-5) = 175;$$

$$y(3) = -81.$$

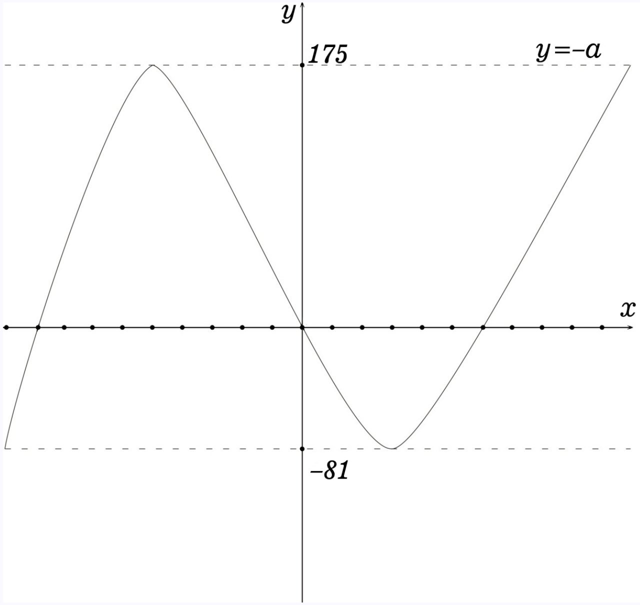

Рис. 5.4.

На рисунке 5.4 представлен эскиз графика функции $y = x^3 + 3x^2 - 45x$.

Очевидно, что, если $-a = -81$ или $-a = 175$, то прямая $y = -a$ является касательной к графику функции в точках с абсциссами 3 и -5 соответственно, и при этом уравнение имеет 2 корня.

Следовательно, при $-a < -81$, то есть при $a > 81$ и $-a > 175$, то есть при $a < -175$ уравнение имеет единственный корень.

Наименьшее натуральное значение a равно 82.

Ответ: при $a = 82$.

5.2 Решение задач, связанных с поиском критических точек, нахождением наибольших и наименьших значений функции (на основе использования производной функции)

Рассмотрим некоторые теоретические вопросы, связанные с непрерывными функциями.

1. Признаки возрастания и убывания функции:

1. Если в каждой точке x_0 некоторого промежутка $f'(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке.

2. Если в каждой точке x_0 некоторого промежутка $f'(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Наглядное геометрическое истолкование признака возрастания функции (рис. 5.5).

Пусть a и b $(a < b)$ – две точки из промежутка, на котором $f'(x) > 0$. Через точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ проведем секущую AB; ее угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

На дуге AB найдется такая точка $C(c; f(c))$, что касательная к графику функции параллельна прямой AB. Угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\alpha = f'(c)$. Следовательно, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Так как $f'(c) > 0$ и $b - a > 0$, то $f(b) - f(a) > 0$, то есть $f(b) > f(a)$.

Таким образом, если a и b – такие точки из промежутка, что $a < b$, то $f(a) < f(b)$. Это означает, что функция $f(x)$ возрастает на промежутке.

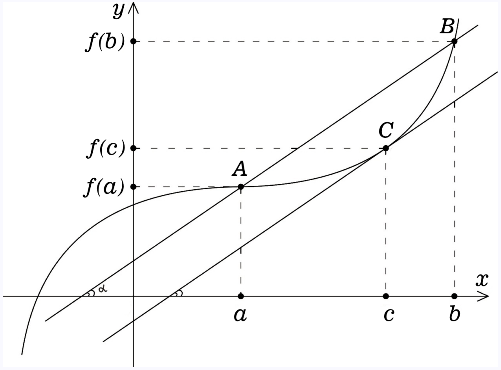

Рис. 5.5.

2. Алгоритм нахождения промежутков возрастания и убывания функции $f(x)$:

1) найти производную $f^{'}(x)$;

2) найти точки, в которых производная равна нулю (решить уравнение $f^{'}(x) = 0$);

3) отметить нули производной на координатной прямой;

4) определить знаки значений производной $f^{'}(x)$ в полученных (между нулями) промежутках, то есть найти промежутки знакопостоянства функции $f^{'}(x)$ (каждый из них совпадает с промежутком возрастания или убывания функции f).

3. Максимумы и минимумы функции:

1. Точка x_0 называется **внутренней точкой** множества D, если существует такая окрестность точки x_0, которая содержится во множестве

D.

2. Точка x_0 называется **точкой максимума** функции, если существует такая окрестность точки x_0, что для любого x из этой окрестности верно неравенство $f(x_0) \geq f(x)$.

При этом говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум.

Значение функции в точке максимума называется **максимумом функции**.

3. Точка x_0 называется **точкой минимума** функции, если существует такая окрестность точки x_0, что для любого x из этой окрестности верно неравенство $f(x_0) \leq f(x)$.

При этом говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 **минимум**.

Значение функции в точке минимума называется **минимумом функции**.

4. Точки максимума и минимума называются точками **экстремума функции**. Значение функции в точке экстремума называется **экстремумом функции**.

5. Точка x_0 называется **критической точкой** функции $f(x)$, если производная в точке x_0 или равна нулю, или не существует.

4. Необходимое условие экстремума.

Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и в точке x_0 существует производная, то $f'(x_0) = 0$.

5. Достаточное условие экстремума.

Если $f'(x_0) = 0$ и при переходе через точку x_0 значение производной меняет знак с «+» на «−», то x_0 является точкой максимума функции f.

Если $f'(x_0) = 0$ и при переходе через точку x_0 значение производной меняет знак с «−» на «+», то x_0 является точкой минимума функции f.

6. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции f на отрезке $[a; b]$.

1) найти производную функции $f'(x)$;

2) найти критические точки функции (точки, в которых производная функции или равна нулю или не существует) на отрезке $[a; b]$;

3) вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка $[a; b]$;

4) из всех найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Рассмотрим основные типы задач с параметрами, в которых требуется найти критические точки функции, наибольшее или наименьшее значение функции.

Пример 5.10. Найдите все значения параметра a, при которых не имеет критических точек функция
$f(x) = (a^2 - 3a + 2) \cdot \left(\cos^2 \frac{x}{4} - \sin^2 \frac{x}{4}\right) + (a - 1) \cdot x + \sin 1.$

Решение. Используя формулу $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$, перепишем формулу в виде:

$$f(x) = (a-1)(a-2) \cdot \cos \frac{x}{2} + (a-1) \cdot x + \sin 1.$$

Найдем производную функции:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(a-1)(a-2)\cdot\left(-\sin\frac{x}{2}\right) + (a-1) =$$

$$= (a-1)\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot(a-2)\cdot\sin\frac{x}{2}\right).$$

Рассмотрим возможные случаи:

1. Если $a = 1$, то $f'(x) = 0$, то есть каждая точка является критической.

2. Если $a \neq 1$, то равенство $f'(x) = 0$ имеет вид $(a-2)\cdot\sin\frac{x}{2} = 2$.

При этом если $|a-2| < 2$, то уравнение не имеет корней, и следовательно, функция не имеет критических точек, то есть при $0 < a < 4$ функция не имеет критических точек.

Учитывая, что $a \neq 1$, получим окончательно: $0 < a < 1 \cup 1 < a < 4$.

Ответ: при $0 < a < 1$ или при $1 < a < 4$.

Пример 5.11. Найдите критические точки функции $f(x) = (2x-1)\cdot\sqrt[4]{x-a}$.

Решение. Найдем производную функции:

$$f'(x) = (2x-1)'\cdot\sqrt[4]{x-a} + (2x-1)\cdot\left(\sqrt[4]{x-a}\right)' =$$

$$= 2\sqrt[4]{x-a} + (2x-1)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x-a}\right)^3} = \frac{10x-8a-1}{4\left(\sqrt[4]{x-a}\right)^3}$$

Решим уравнение $f^{'}(x)=0$;

$$\begin{cases} 10x-8a-1=0, \\ x>a; \end{cases} \qquad x=\frac{4}{5}a+\frac{1}{10}.$$

Учитывая условие $x>a$, решим неравенство $\frac{4}{5}a+\frac{1}{10}>a$; отсюда $a<\frac{1}{2}$.

Ответ: при $a\geq\frac{1}{2}$ нет критических точек; при $a<\frac{1}{2}$ критическая точка $x=\frac{4}{5}a+\frac{1}{10}$.

Пример 5.12. При каких значениях параметра a функция $f(x)=x^3+3\cdot(a-7)\cdot x^2+3\cdot(a^2-9)\cdot x+1$ имеет положительную точку максимума?

Решение. Найдем производную функции:

$$f^{'}(x)=3x^2+6\cdot(a-7)\cdot x+3(a^2-9).$$

$$f^{'}(x)=0;$$

$$3x^2+6\cdot(a-7)\cdot x+3(a^2-9)=0;$$

$$x^2+2(a-7)\cdot x+a^2-9=0.$$

Рассмотрим возможные случаи:

1. Если $D<0$, то функция $f(x)$ не имеет критических точек, следовательно, не имеет экстремумов.

2. Если $D = 0$, то уравнение $f'(x) = 0$ имеет единственный корень (два равных), но этот корень не будет критической точкой.

3. Если $D > 0$, то уравнение $f'(x) = 0$ имеет два различных корня: x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$.

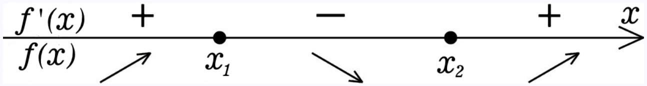

Рис. 5.6.

Следовательно, x_1 – точка максимума (достаточное условие экстремума). Для того чтобы выполнялось условие $x_{max} > 0$ достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 > 0. \end{cases}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} 4(a-7)^2 - 4 \cdot (a^2 - 9) > 0, \\ a^2 - 9 > 0, \\ -2 \cdot (a-7) > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 - 14a + 49 - a^2 + 9 > 0, \\ |a| > 3, \\ a - 7 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 4\frac{1}{7}, \\ a > 3 \;\text{ или }\; a < -3, \\ a < 7; \end{cases}$$

$$a < -3 \quad \text{или} \quad 3 < a < 4\frac{1}{7}.$$

Ответ: при $a < -3$ или $3 < a < 4\frac{1}{7}$.

Пример 5.13. Найдите все значения параметра a, при которых функция $y = \sin 2x - 8(a+1)\cdot\sin x + (4a^2+8a-14)\cdot x$ является возрастающей на всей числовой прямой и не имеет при этом критических точек.

Решение. Заметим, что при любом фиксированном значении параметра a данная функция дифференцируема в каждой точке числовой прямой.

Так как функция возрастает, то должно выполняться неравенство $f'(x) \geq 0$.

Так как по условию функция не имеет критических точек, то при любом x должно выполняться неравенство $f'(x) \neq 0$.

Найдем производную функции:

$$f'(x) = 2\cdot\cos 2x - 8(a+1)\cos x + 4a^2 + 8a - 14$$

и переформулируем задачу:

Найдите все значения параметра, при которых для любого x выполняется неравенство $2\cos 2x - 2(a+1)\cdot\cos x + 4a^2 + 8a - 14 > 0$.

Воспользуемся формулой: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и введем замену $\cos x = t$, где $|t| \le 1$ получим:

$$2(2t^2 - 1) - 8(a+1)\cdot t + 4a^2 + 8a - 14 > 0,$$

$$2t^2 - 1 - 4(a+1)\cdot t + 2a^2 + 4a - 7 > 0,$$

$$t^2 - 2(a+1)\cdot t + a^2 + 2a - 4 > 0.$$

Найдем абсциссу (t_0) вершины параболы

$y = t^2 - 2(a+1)\cdot t + a^2 + 2a - 4$: $t_0 = a+1$ и рассмотрим возможные случаи расположения t_0 относительно отрезка $[-1;1]$.

1. Если $t_0 \le -1$, то есть $a+1 \le -1$; отсюда $a \le 2$, тогда и наименьшее значение на отрезке $[-1;1]$ должно быть положительным: $f(-1) > 0$, то есть

$$(-1)^2 - 2(a+1)\cdot(-1) + a^2 + 2a - 4 > 0,$$

$$1 + 2a + 2 + a^2 + 2a - 4 > 0,$$

$$a^2 + 4a - 1 > 0.$$

Имеем систему $\begin{cases} a \le -2, \\ a^2 + 4a - 1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le -2, \\ a < -2-\sqrt{5} \;\text{ или }\; a > -2+\sqrt{5}; \end{cases}$

окончательно получили: $a < -2-\sqrt{5}$.

2. Если $t_0 \in (-1; 1)$, то есть $-1 < a+1 < 1$, отсюда $-2 < a < 0$, то, аналогично, наименьшее значение на отрезке $[-1; 1]$ должно быть положительным: $f(a+1) > 0$, то есть

$$(a+1)^2 - 2 \cdot (a+1) \cdot (a+1) + a^2 + 2a - 4 > 0,$$

$$a^2 + 2a + 1 - 2(a^2 + 2a + 1) + a^2 + 2a - 4 > 0,$$

$$-5 > 0.$$

Это неравенство неверно ни при каких значениях параметра a.

3. Если $t_0 \geq 1$, то есть $a+1 \geq 1$, тогда $a \geq 0$. Следовательно, должно выполняться условие $f(1) > 0$, то есть имеем систему:

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ 1^2 - 2(a+1) \cdot 1 + a^2 + 2a - 4 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ a^2 - 5 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ a > \sqrt{5} \text{ или } a < -\sqrt{5}; \end{cases} \quad \text{окончательно: } a > \sqrt{5}.$$

Ответ: при $a < -2 - \sqrt{5}$ или при $a > \sqrt{5}$.

Пример 5.14. Найдите все значения параметра a, при которых минимум функции $y = ax^2 + 4ax + 7a^2 - 1$ равен 2.

Решение. Найдем производную и критические точки данной функции:

$$y' = 2ax + 4a;$$

$$y' = 0,$$

$$2ax + 4a = 0;$$

$$x = -2 \ (a \neq 0).$$

В точке $x = -2$ функция имеет экстремум, равный 2. Таким образом,

$$f(-2) = 4a - 8a + 7a^2 - 1 = 2;$$

$$7a^2 - 4a - 3 = 0;$$

$$a_1 = 1; \ \ a_2 = -\frac{3}{7}.$$

Поскольку данная в условии задачи функция имеет в критической точке минимум, то коэффициент при x^2 должен быть положительным. Поэтому $a = -\frac{3}{7}$ – не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: при $a = 1$.

Пример 5.15. При каких значениях параметра a наибольшее значение функции $y = 2x^3 - 6x + a$ на отрезке $[-2; 0]$ равно 5?

Решение. Найдем производную функции и приравняем ее к нулю:

$$y' = 6x^2 - 6;$$

$$y' = 6(x-1)\cdot(x+1).$$

$$y' = 0 \text{ при } x = 1 \text{ или при } x = -1.$$

Заметим, что $1 \notin [-2;0]$ и поэтому на отрезке $[-2;0]$ функция имеет только одну критическую точку $x = -1$.

Найдем значение функции на концах отрезка и в критической точке:

$$y(-2) = a - 4;$$

$$y(-1) = a + 4;$$

$$y(0) = a.$$

Наибольшее из этих значений $y(-1) = a + 4$. Поэтому $a + 4 = 5$. Отсюда $a = 1$.

Ответ: $a = 1$.

Пример 5.16. Найдите все значения параметра a, при которых произведение действительных корней уравнения $x^2 + 2(a-6)\cdot x + 2a^2 - 17a + 42 = 0$ принимает наибольшее значение.

Решение. Поскольку уравнение должно иметь корни, то $D \geq 0$.

$$D = 4(a-6)^2 - 4\cdot(2a^2 - 17a + 42) \geq 0;$$

$$a^2 - 12a + 36 - 2a^2 + 17a - 42 \geq 0;$$

$$-a^2 + 5a - 6 \geq 0;$$

$$a^2 - 5a + 6 \le 0;$$

$$(a-2)(a-3) \le 0.$$

Отсюда $2 \le a \le 3$.

Согласно теореме Виета, имеем $x_1 \cdot x_2 = 2a^2 - 17a + 42$.

Следовательно, задача заключается в отыскании наибольшего значения функции $f(a) = 2a^2 - 17a + 42$ на отрезке $[2; 3]$.

Найдем критические точки функции:

$$f'(a) = 4a - 17,$$

$$4a - 17 = 0,$$

$$a = 4,25.$$

Так как $4,25 \notin [2; 3]$, то наибольшее значение функции $f(a)$ следует искать на концах отрезка $[2; 3]$.

$$f(2) = 16, \quad f(3) = 9.$$

Таким образом, произведение корней уравнения достигает наибольшего значения при $a = 2$.

Ответ: при $a = 2$.

Пример 5.17. В зависимости от значений параметра a найдите наибольшее значение функции $f(x) = \frac{1}{2ax^2 - x^4 - 3a^2}$ на отрезке $[-2; 1]$.

Решение. Рассмотрим квадратное (относительно x^2) уравнение

$$2ax^2 - x^4 - 3a^2 = 0$$

и найдем его дискриминант (D).

$$D = 4a^2 - 12a^2 = -8a^2.$$

Следовательно, при любом значении параметра a и любом x из области определения функции $f(x)$ ее значения отрицательны.

Кроме того, легко видеть, что $f(-x) = f(x)$, поэтому график функции при каждом фиксированном значении параметра a симметричен относительно оси ординат.

Найдем производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - a)}{(2ax^2 - x^4 - 3a^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{или при} \quad x^2 = a.$$

1. Если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ не имеет корней и $f'(x) = 0$ только при $x = 0$ (рис. 5.7).

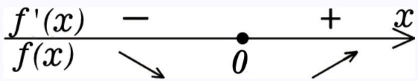

Рис. 5.7.

Таким образом, $x = 0$ – точка минимума функции, а наибольшее значение функция принимает при $x = -2$ (в силу того, что график симметричен относительно оси ординат и так как $|-2| > 1$).

$$f(-2) = \frac{1}{3a^2 - 8a + 16}$$

2. Если $a = 0$, то функции примет вид $f(x) = -\frac{1}{x^4}$; эта функции убывает при $x < 0$ и возрастает при $x > 0$, следовательно, в точке $x = -2$ она принимает наибольшее значение.

$$f(-2) = -\frac{1}{16}.$$

3. Если $a > 0$, то производная равна нулю при $x = -\sqrt{a}$, при $x = 0$ и при $x = \sqrt{a}$ (рис. 5.8).

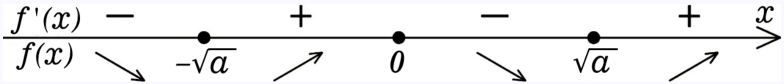

Рис. 5.8.

$x = 0$ – точка максимума, причем $f(0) = -\frac{1}{3a^2}$.

Для того чтобы полученное значение было наибольшим, нужно, чтобы выполнялось неравенство: $-\frac{1}{3a^2-8a+16} \leq -\frac{1}{3a^2}$, то есть $a \geq 2$.

Ответ: $max f(x) = f(-2) = -\frac{1}{3a^2-8a+16}$ при $a < 2$,
$max f(x) = f(0) = -\frac{1}{3a^2}$ при $a \geq 2$.

Пример 5.18. Найдите все значение параметра a, удовлетворяющие неравенству $0 \le a \le \frac{\pi}{2}$, при каждом из которых минимум функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3(\cos a - \sin a) - 3x^2 \cdot \sin 2a$ на отрезке $[-\sin a; \cos a]$ принимает наименьшее значение.

Решение. Найдем производную функции и решим уравнение:

$$f'(x) = 0.$$

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2(\cos a - \sin a) - 6x \cdot \sin 2a;$$

$$f'(x) = 0;$$

$$6x(2x^2 + 2x(\cos a - \sin a) - \sin 2a) = 0;$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sin a, \quad x_3 = -\cos a.$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. Если $0 \le a \le \frac{\pi}{4}$, то $\sin a \le \cos a$ и корни уравнения будут расположены так, как показано на рис. 5.9.

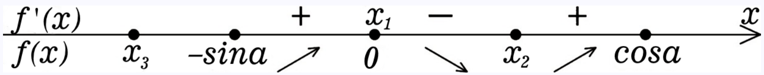

Рис. 5.9.

Следовательно, функция принимает наименьшее значение либо при $x = x_2$, либо при $x = -\sin a$ (на указанном отрезке).

Заметим, что $f(x_2) - f(-\sin a) = f(\sin a) - f(-\sin a) =$
$= 8\sin^3 a(\cos a - \sin a) \geq 0$.

Следовательно, $min f(x) = f(-\sin a) = 3\sin^4 a - 4\sin^3 a(\cos a - \sin a) - 6\cdot\sin^3 a\cdot\cos a = 7\cdot\sin^4 a - 10\cdot\sin^3 a\cdot\cos a$.

2. Если $\frac{\pi}{4} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$, то $\sin a \geq \cos a$ и корни уравнения $f'(x) = 0$ расположены так, как показано на рис. 5.10.

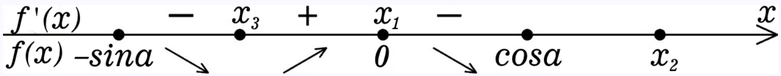

Рис. 5.10.

Следовательно, функция принимает наименьшее значение либо при $x = x_3$, либо при $x = \cos a$.

Заметим, что $f(x_3) - f(\cos a) = f(-\cos a) - f(\cos a) =$
$= -8\cos^3 a(cosa - sina) \geq 0$.

Значит, $f(\cos a) = 3\cos^4 a + 4\cos^3 a(\cos a - \sin a) - 6\sin a\cdot\cos^3 a =$
$= 7\cos^4 a - 10\sin a\cdot\cos^3 a$.

Таким образом,

$$\varphi(a) = 7\sin^4 a - 10\sin^3 a\cdot\cos a \quad \text{при} \quad 0 \leq a \leq \frac{\pi}{4};$$
$$\varphi(a) = 7\cos^4 a - 10\sin a\cdot\cos^3 a \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{4} \leq a \leq \frac{\pi}{2}.$$

Видно, что $\varphi(a) = \varphi\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ при $0 \leq a \leq \frac{\pi}{4}$ и достаточно найти минимум функции $\varphi(a) = 7\sin^4 a - 10\sin^3 a\cdot\cos a$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Имеем: $\varphi'(a) = 28 \cdot \sin^3 a \cdot \cos a - 30 \cdot \sin^2 a \cdot \cos^2 a + 10 \cdot \sin^4 a == 2 \sin^2 a \cdot \cos^2 a (5 \operatorname{tg}^2 a + 14 \operatorname{tg} a - 15)$.

$\varphi'(a) = 0$ на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

$$\operatorname{tg} a_1 = \frac{-7 - 2\sqrt{31}}{5}; \quad \operatorname{tg} a_2 = \frac{-7 + 2\sqrt{31}}{5}.$$

$$\operatorname{tg} a_2 > 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} a_2 < 1, \quad \text{поэтому}$$

$$a_2 = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{31} - 7}{5}.$$

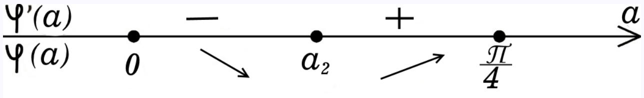

Рис. 5.11.

a_2 – точка минимума.

Из непрерывности $\varphi(a)$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ и монотонности на интервалах $(0; a_2)$ и $\left(a_2; \frac{\pi}{4}\right)$ следует, что наименьшее значение $\varphi(a)$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ равно $\varphi(a_2)$.

Такое же значение функция принимает в точке $\frac{\pi}{2} - a_2$, принадлежащей промежутку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: при $a = arctg \frac{2\sqrt{31}-7}{5}$; при $a = \frac{\pi}{2} - arctg \frac{2\sqrt{31}-7}{5}$.

Начало
Содержание
Приложение

Назад
На весь экран
Закрыть

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

Задачи, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратичной функции. Решение уравнений и неравенств с параметрами, сводящихся к квадратным уравнениям и неравенствам

1. При каких значениях параметра a уравнение $a^2(x-1)+2(1-2x)+a=0$ имеет бесконечно много корней?

   Ответ: при $a=2$.

2. Найдите все значения параметра m, при которых один из корней уравнения $x^2-(2m+1)\cdot x+m^2+m-2=0$ находится между числами 0 и 2, а второй корень – между числами 3 и 5.

   Ответ: при $1<m<3$.

3. При каких значениях параметра m сумма кубов корней уравнения $6x^2+6(m-1)\cdot x-5m+2m^2=0$ является наибольшей?

   Ответ: при $m=-0,5$.

4. Найдите все значения параметра m, при которых неравенство $(m-1)\cdot x^2+(m+1)\cdot x+m+1>0$ справедливо для любых действительных значений x.

   Ответ: при $m>\frac{5}{3}$.

5. При каких значениях параметра a один корень уравнения $x^2-(a+2)\cdot x+a+1=0$ в 3 раза больше другого?

   Ответ: при $a=2$.

6. При каких значениях параметра a сумма корней уравнения $5x^2+10(a-2)\cdot x+20-11a=0$ больше квадрата суммы корней?

   Ответ: при $\frac{9}{5}\le a<2$.

7. Найдите все значения параметра b, при которых любое значение x, удовлетворяющее неравенству $ax^2+(1-a^2)\cdot x-a>0$ удовлетворяет также неравенству $|x|\le 2$.

   Ответ: при $-2\le a\le -\frac{1}{2}$.

Указания. Решения.

1. *Указание.* Перепишите уравнение в следующем виде: $(a-2)\cdot(a+2)\cdot x=(a-2)\cdot(a+1)$ и используйте схему решения уравнений с параметром.

2. *Указание* (I способ). Рассмотрите графическую модель задачи (рис. 1.1) и решите систему

$$\begin{cases} f(0)>0, \\ f(2)<0, \\ f(3)<0, \\ f(5)>0. \end{cases}$$

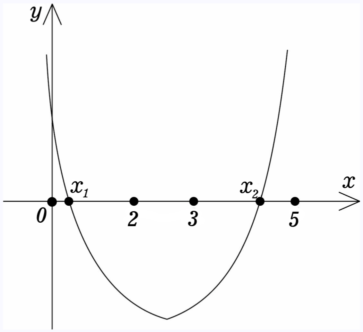

Рис.1.1

II способ. Найдите корни x_1 и x_2 квадратного уравнения по формуле корней, и потребуйте выполнения условий

$$\begin{cases} 0 < x_1 < 2, \\ 3 < x_2 < 5, \end{cases} \quad \text{где} \quad x_1 < x_2.$$

3. *Указание.* Используйте формулу суммы кубов $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2(x_1 + x_2)$, где x_1 и x_2 – корни данного уравнения, причем $x_1 + x_2 = \frac{-6(m-1)}{6}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{2m^2-5m}{6}$ (теорема Виета).

4. *Указание.* Рассмотрите 2 случая:

   1) $m = 1$;

   2) $m \neq 1$.

5. *Указание.* Найдите дискриминант данного уравнения $(D = a^2 \geq 0)$ и рассмотрите случаи:

   1) $a = 0$;

   2) $a > 0$.

6. *Указание.* Найдите, при каких значениях параметра существуют корни уравнения $(D \geq 0)$ и решите неравенство

   $x_1 + x_2 > (x_1 + x_2)^2$, используя теорему Виета.

7. *Указание.* Рассмотрите случаи:

1) $a = 0$;

2) $a > 0$;

3) $a < 0$.

Для случаев 2) и 3) рассмотрите графические модели (рис. 1.2 и рис. 1.3).

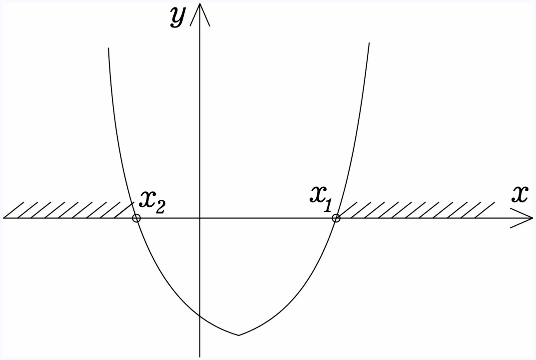

Рис.1.2

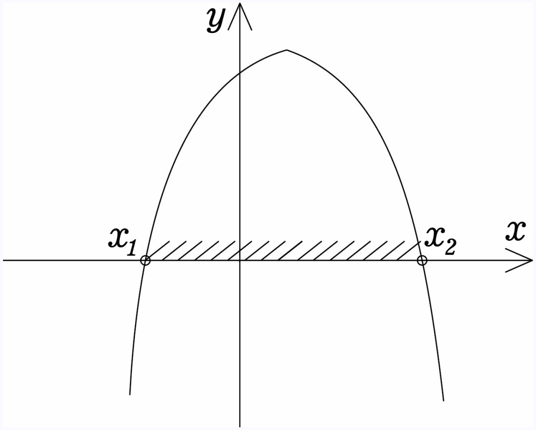

Рис.1.3

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

Преобразование графиков функций(параллельный перенос, поворот и др.)

1. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$ имеет более трех корней?

   Ответ: при $a = 3$ или $3 < a < 5$.

2. Найдите такие натуральные значения параметра a, при которых выражение $\frac{1}{x+y+3}$ имеет смысл для всех пар $(x; y)$ таких, что $x < 0$, $y < 0$ и для которых имеет смысл выражение $\lg(xy - a)$.

   Ответ: $a \geq 3$, $a \in N$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $9^x - 2 \cdot (2a - 2) \cdot 3^x + 5a^2 - 4a = 0$ имеет два различных корня?

   Ответ: при $\frac{4}{5} < a < 1$ или $a > 1$.

4. Найдите все такие значения параметра a, что при любом значении параметра b уравнение $ax + b = |x|$ имеет корни.

   Ответ: при $|a| > 1$.

5. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}x, \\ x^2 + (y-a)^2 = 3 \end{cases}$$ имеет единственное решение?

Ответ: при $a = 3$ или $a = -3$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$ имеет четыре решения.

Ответ: при $a = 1$ или $a = \sqrt{2}$.

Указания. Решения.

1. *Указание.* Постройте схематически графики функций $y = a$ (семейство прямых, параллельных оси абсцисс) и $g = |x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5|$ (рис. 2.1).

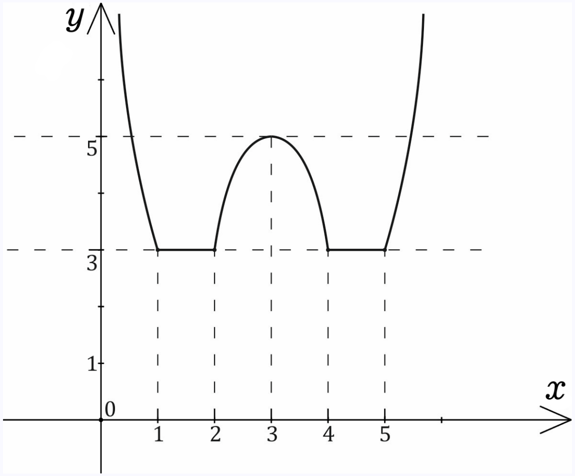

Рис.2.1

2. *Указание.* Постройте графическую модель задачи (рис. 2.2).

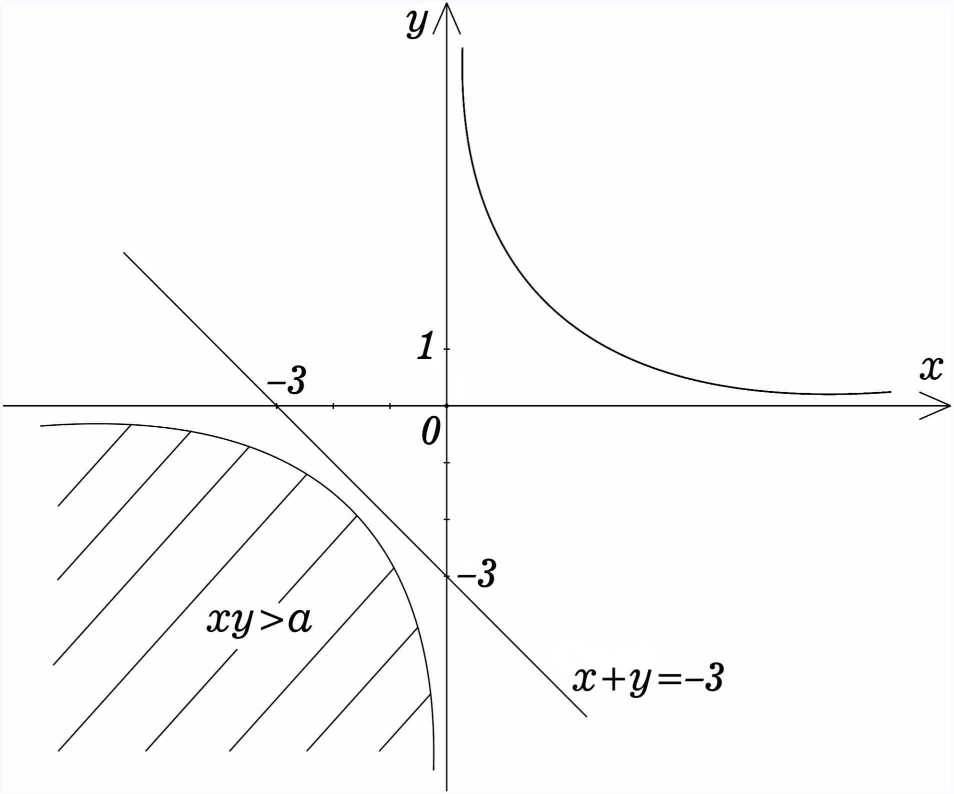

Рис.2.2

3. *Указание.* Используйте замену $3^x = t$, $t > 0$ и постройте графическую модель задачи, удовлетворяющую условию задачи (рис. 2.3).

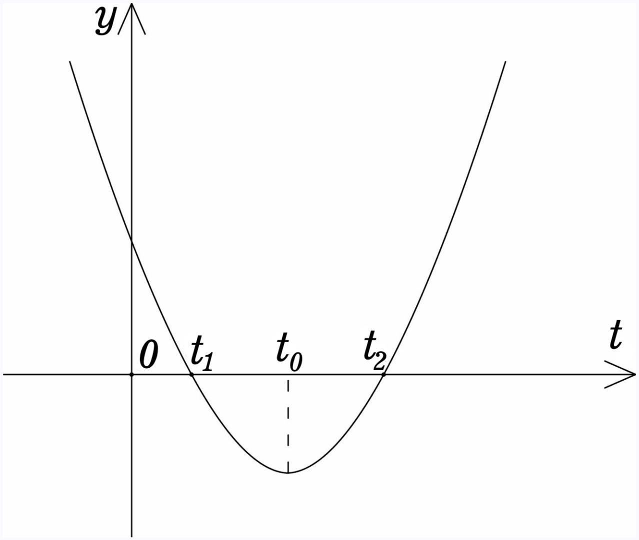

Рис.2.3

Составьте и решите систему $\begin{cases} D > 0, \\ t_0 > 0, \\ f(0) > 0. \end{cases}$

4. *Указание.* Постройте графики функций $g = ax + b$ при $a > 1$, $b = 0$ и $y = |x|$ (рис. 2.4).

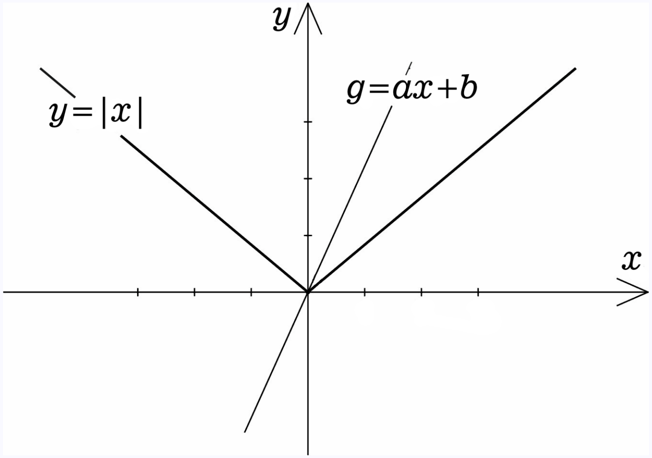

Рис.2.4

Рассматривая поворот графика функции $y = ax + b$ (по часовой стрелке и против часовой стрелки на различные углы), легко получить ответ задачи.

5. *Указание.* Преобразуйте первое уравнение системы к виду $(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 3$ и постройте графическую модель системы (рис. 2.5).

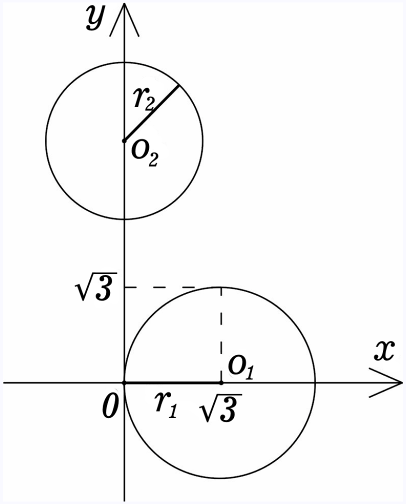

Рис.2.5

Используя параллельный перенос вдоль оси Oy, найдите значения параметра a, при которых окружности будут касаться.

6. *Указание.* Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 1$ является окружность с центром $O(0; 0)$ и радиусом $r = 1$. Графиком уравнения $|x|+|y| = a$ является квадрат (рис. 2.6).

   Система будет иметь 4 решения в двух следующих случаях:

   1) если все вершины квадрата лежат на окружности радиуса 1;

   2) если стороны квадрата касаются окружности радиуса 1.

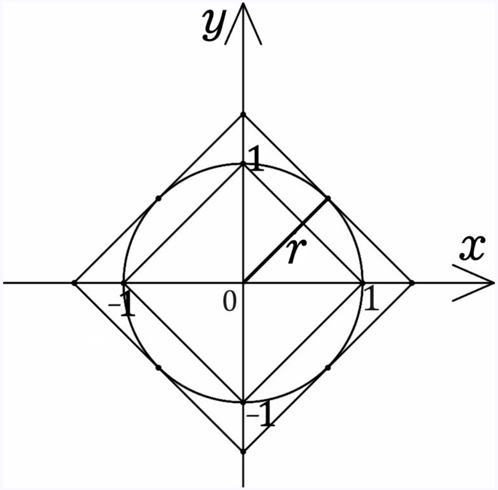

Рис.2.6

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

Представление уравнения (неравенства) с одной переменной и одним параметром как уравнения (неравенства)с двумя переменными

1. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+a} = x$ имеет два корня?

   Ответ: при $-\frac{1}{4} < a \leq 0$.

2. Решите уравнение $x^4 + x^3 - 3ax^2 - 2ax + 2a^2 = 0$, где $a > 0$.

   Ответ: $x_1 = -\sqrt{2a}$; $x_2 = \sqrt{2a}$; $x_3 = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$; $x_4 = \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

3. Для каждого значения параметра a найдите количество корней уравнения $\sqrt{2|x| - x^2} = a$.

   Ответ: при $a > 1$ или $a < 0$ нет корней; при $a = 1$ два корня; при $a = 0$ три корня; при $0 < a < 1$ четыре корня.

4. Найдите все значения x, при которых неравенство $(2-a) \cdot x^3 + (1-2a) \cdot x^2 - 6x + 5 + 4a - a^2 < 0$ справедливо хотя бы для одного значения параметра a из промежутка $[-1; 2]$.

   Ответ: при любом $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

5. Для каждого значения параметра a найдите все значения x, удовлетворяющих условию $|x-2| + a|x+3| = 5$.

Ответ: при $a = 1$, $[-3; 2]-$ решения; при $a = -1$, $(-\infty; -3]-$ решения; при $|a| > 1$, $x = -3$; при $-1 < a < 1$, $x = -3$ или $x = \frac{7-3a}{a+1}$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2x + a \leq 0, \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0 \end{cases} \quad \text{имеет единственное решение?}$$

Ответ: при $a = 1$ или $a = \sqrt{2}$.

7. При каких значениях параметра a уравнение $(a + 4x - x^2 - 1) \cdot (a + 1 - |x - 2|) = 0$ имеет ровно три корня?

Ответ: при $a = -1$.

Указания. Решения.

1. *Указание.* Составьте и решите систему

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x + a = x^2, \end{cases}$$

которая равносильна данному уравнению, и постройте график $a = x^2 - x$ (параметр легко выражается через переменную) в системе $(x; a)$.

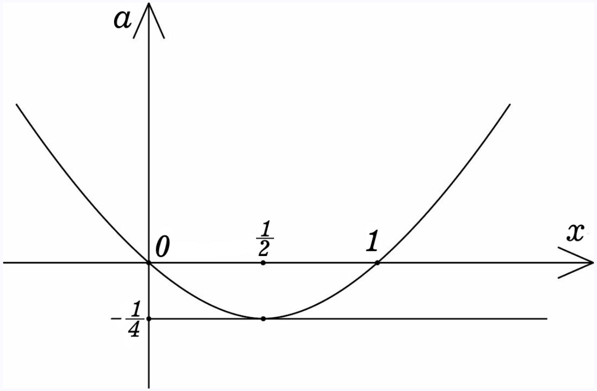

Рис.3.1

2. *Указание.* Перепишите уравнение в следующем виде: $2a^2 - (3x^2 + 2x) \cdot a + x^4 + x^3 = 0$ и решите его как квадратное

относительно a.

3. *Указание.* Постройте график функции $f(x) = \sqrt{2|x| - x^2}$ и график функции $g = a$ – семейство прямых, параллельных оси Ox (рис. 3.2).

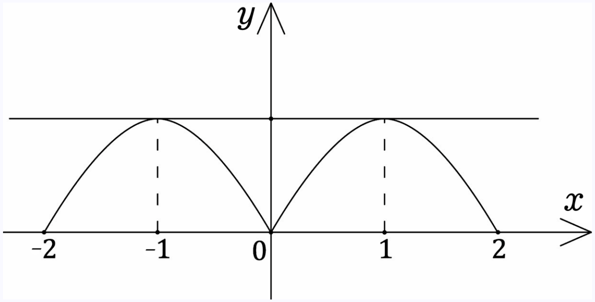

Рис.3.2

4. *Указание.* Перепишите неравенство в виде $a^2 + (x^3 + 2x^2 - 4) \cdot a - (2x^3 + x^2 - 6x + 5) > 0$, где параметр a – переменная, а x – параметр.

   Заметьте, что требование задачи не будет выполнено, если отрезок $[-1; 2]$ будет расположен на числовой прямой между корнями квадратного трехчлена $a^2 + (x^3 + 2x^2 - 4) \cdot a - (2x^3 + x^2 - 6x + 5)$, то есть если будет совместна следующая система

$$\begin{cases} f(-1) \leq 0, \\ f(2) \leq 0. \end{cases}$$

Решением системы является $[-2; 0] \cup 1$, поэтому ответом в задаче будет дополнение к указанному множеству.

5. *Указание.* Решение аналогично задаче 2.2 (лекция 3).

6. *Указание.* Постройте в системе $(x; a)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a \leq -x^2 - 2x$ и $a \geq \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{6}x$ (рис. 3.3). Найдите координаты точек пересечения графиков.

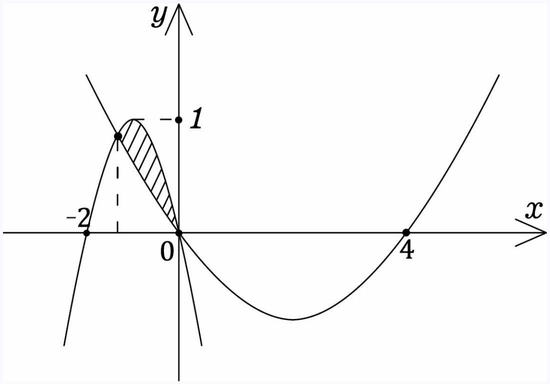

Рис.3.3

7. *Указание.* В системе $(x;a)$ постройте графики функций $a = x^2 - 4x + 1$ (парабола) и $a = |x-2| - 1$. Проведите прямую, параллельную оси абсцисс так, чтобы она пересекала построенные графики ровно в трех точках.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

Метод замены при решении задач с параметрами

1. Для каждого значения параметра a решите уравнение $x^2+|x|+a=0$.

   Ответ: если $a>0$, то нет корней; если $a=0$, то $x=0$; если $a<0$, то $x_1=\frac{\sqrt{1-4a}-1}{2}$; $x_2=\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$.

2. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $5^{1+x}+5^{1-x}$; $\frac{a}{2}$; $25^{-x}+25^{-x}$, взятые в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию?

   Ответ: при $a\geq 12$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x+a=0$ имеет корни?

   Ответ: $-\frac{3}{2}\leq a\leq\frac{1}{2}$.

4. При каждом значении параметра m решите уравнение

$$(m-1)\cdot\cos^2 x-2(m+1)\cdot\cos x+2m-1=0. \qquad (1)$$

   Ответ: при $m<0$ или $m>4$ нет корней; при $m=1$, $x=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi k, k\in Z$; при $m\in[0;1)\cup(1;4]$ два корня: $x=\pm\arccos\frac{m+1-\sqrt{5m-m^2}}{m-1}+2\pi k, k\in Z$.

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sin^2 3x - (a+0,5)\cdot\sin 3x + 0,5a = 0 \qquad (2)$$

имеет ровно три корня, принадлежащие отрезку $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$?

Ответ: при $a = 1$.

6. Найдите все такие значения параметра a, при которых уравнение $\log_3\left(9^x + 9a^3\right) = x$ (3) имеет ровно 2 корня.

Ответ: при $0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{36}}$.

7. При каких значениях параметра a неравенство $\log_5(a\cdot\cos 2x + (1+5a^2-\sin^2 x)\cos x + 4 + a) \le 1$ (4) справедливо для всех значений x?

Ответ: $-\frac{2}{5} \le a \le 0$.

Кафедра методики преподавания математики и информатики

Указания. Решения.

1. *Указание.* Введите замену $|x| = t$, $t \geq 0$ и рассмотрите квадратное относительно t уравнение $t^2 + t + a = 0$. Найдите корни этого квадратного уравнения и вернитесь к замене: $|x| = t_1$ и $|x| = t_2$.

2. *Решение.* Введем замену $5^x + 5^{-x} = t$, тогда $t \geq 2$ и $25^x + 25^{-x} = (5^x + 5^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$.

   По свойству членов арифметической прогрессии должно выполняться равенство $\frac{a}{2} = \frac{t^2-2+5t}{2}$, то есть $a = t^2 + 5t - 2$ и, так как $t \geq 2$, то $a \geq 12$.

   С другой стороны, дискриминант квадратного относительно t уравнения $t^2 + 5t - 2 - a = 0$ должен быть неотрицательным, то есть $D = 25 + 4(a + 2) \geq 0$; отсюда $a \geq -\frac{33}{4}$.

   Окончательный ответ дает решение системы $\begin{cases} a \geq -\frac{33}{4}, \\ a \geq 12. \end{cases}$

3. *Решение.* Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin 2x + a = 0,$$

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2x + \sin 2x + a = 0,$$

$$2 - \sin^2 2x + 2\sin 2x + 2a = 0,$$
$$\sin^2 2x - 2\sin 2x - (2a + 2) = 0.$$

Введем замену $sin 2x = t$, где $-1 \le t \le 1$, тогда уравнение примет вид:

$$t^2 - 2t - (2a + 2) = 0.$$
$$t^2 - 2t + 1 - (2a + 3) = 0,$$
$$(t - 1)^2 = 2a + 3.$$

Если $2a + 3 \ge 0$, то $t_1 = 1 - \sqrt{2a + 3}$, $t_2 = 1 + \sqrt{2a + 3}$.

Для выполнения требования задачи надо решить совокупность двух систем неравенств

$$\begin{cases} -1 \le 1 + \sqrt{3 + 2a} \le 1, \\ a \ge -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -1 \le 1 - \sqrt{3 + 2a} \le 1, \\ a \ge -\frac{3}{2}; \end{cases}$$

$$a = -\frac{3}{2} \quad \text{или} \quad -\frac{3}{2} \le a \le \frac{1}{2}.$$

4. *Решение.* Введем замену $\cos x = t$, где $-1 \le t \le 1$.

Уравнение примет вид: $(m - 1)t^2 - 2(m + 1) \cdot t + 2m - 1 = 0 \quad (5)$

1. При $m = 1$ уравнение примет вид:

$$-4t + 1 = 0;$$

$$t = \frac{1}{4}.$$

Тогда, вернувшись к замене, получим:

$$\cos x = \frac{1}{4}; \quad x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi k, k \in Z.$$

2. При $m \neq 1$ уравнение (5) имеет два корня $t_1 = \frac{m+1-\sqrt{5m-m^2}}{m-1}$; $t_2 = \frac{m+1+\sqrt{5m-m^2}}{m-1}$, причем при $m \in [0;1) \cup (1;5]$ (требование $D \geq 0$). Для выполнения требований задачи надо решить неравенства:

$$-1 \leq \frac{m+1-\sqrt{5m-m^2}}{m-1} \leq 1; \qquad -1 \leq \frac{m+1+\sqrt{5m-m^2}}{m-1} \leq 1$$

5. *Решение.* Введем замену $\sin 3x = t$, тогда уравнение (2) примет вид $t^2 - (a+0,5) \cdot t + 0,5a = 0.$

$$D = (a+0,5)^2 - 4 \cdot 0,5a = (a-0,5)^2 \geq 0$$

$$t_1 = 0,5; \quad t_2 = a.$$

Вернувшись к замене, получим: $\sin 3x = 0,5 \quad (6)$
или $\sin 3x = a \quad (7)$

Уравнение (6) не зависит от параметра и имеет на отрезке $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ два корня: $x_1 = \frac{13\pi}{8}; \quad x_2 = \frac{17\pi}{8}.$

Следовательно, для выполнения требования задачи надо, чтобы уравнение (7) имело на отрезке $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$ только один корень.

Так как функция $y=\sin 3x$ на отрезке $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$ принимает все значения от 0 до 1, причем каждое из этих значений, за исключением 1, – дважды, то требование задачи будет выполнено только при $a=1$.

6. *Решение.* Данное уравнение (3) равносильно уравнению

$$9^x+9a^3=3^x. \tag{8}$$

Введем замену $3^x=t$, тогда уравнение (8) примет вид

$$t^2-t+9a^3=0. \tag{9}$$

Вычислим дискриминант квадратного уравнения: $D=1-36a^3$.

Рассмотрим следующие случаи:

1) $D<0$, то есть $1-36a^3<0$, тогда $a>\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$. Уравнение (9), а, следовательно, и уравнение (3) не имеет корней.

2) $D=0$, то есть $a=\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$, тогда $t_1=t_2=0,5$. Следовательно, уравнение $3^x=0,5$ имеет единственный корень $x=\log_3 0,5$.

3) $D>0$, то есть $a<\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$, тогда уравнение (9) имеет два корня $t_1=\frac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2}$; $t_2=\frac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2}$.

Возвращаясь к замене, получим:

$$3^x = \frac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2} \quad (10) \quad \text{или} \qquad 3^x = \frac{1+\sqrt{1-36a^3}}{2} \quad (11)$$

Заметим, что если $a \le 0$, то справедливо неравенство $\frac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2} \le 0$ и поэтому уравнение (10) не имеет корней; а уравнение (11) при $a \le 0$ будет иметь единственный корень $x = \log_3 \frac{1+\sqrt{1-36a^3}}{2}$. Следовательно, и исходное уравнение (3) также при $a \le 0$ будет иметь единственный корень.

Если же $a > 0$, то и уравнение (10) и уравнение (11) имеют по одному корню:

$$x_1 = \log_3 \frac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2}; \quad x_2 = \log_3 \frac{1+\sqrt{1-36a^3}}{2}$$

Потому и исходное уравнение (3) также имеет два корня.

7. *Решение.* Неравенство (4) равносильно системе

$$\begin{cases} a \cdot \cos 2x + (1 + 5a^2 - \sin^2 x) \cdot \cos x + 4 + a \le 5, \\ a \cdot \cos 2x + (1 + 5a^2 - \sin^2 x) \cdot \cos x + 4 + a > 0. \end{cases}$$

Вводя замену $\cos x = t$, и используя формулу косинуса двойного угла, получим:

$$\begin{cases} t^3 + 2at^2 + 5a^2t \le 1, \\ t^3 + 2at^2 + 5a^2t > -4. \end{cases} \qquad (12)$$

Заметим, что, так как $-1 \le cosx \le 1$, то и $-1 \le t \le 1$, тогда система (12) должна выполняться при всех таких значениях t.

Рассмотрим функцию $f(t) = t^3 + 2at^2 + 5a^2t$ и найдем ее производную: $f'(t) = 3t^2 + 4at + 5a^2$.

Заметим, что, так как $D = 16a^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5a^2 < 0\ \forall a \in R$, то $f'(t) > 0$ для всех действительных значений a. Следовательно, функция $f(t)$ строго возрастает. Поэтому для выполнения требования задачи система

$$\begin{cases} f(-1) > -4, \\ f(1) \le 1 \end{cases}$$

должна иметь решения. Решим систему.

$$\begin{cases} -1 + 2a + 5a^2 > -4, \\ -1 + 2a + 5a^2 \le 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a^2 + 2a + 3 > 0, \\ 5a^2 + 2a \le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = R, \\ a(5a+2) \leq 0; \end{cases}$$

$$-\frac{2}{5} \leq a \leq 0.$$

Таким образом, только при полученных значениях параметра выполняется требование задачи.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

Использование монотонности функции, четности (и нечетности) функции, периодичности функции при решении задач с параметрами

1. При каких значениях параметра a функция $f(x) = (a-2)\cdot x+3a-5$ является: 1) четной; 2) нечетной?

   Ответ: 1) при $a = 2$; 2) при $a = \frac{5}{3}$.

2. При каких значениях параметра a функция $f(x) = \frac{1}{2^x+a}+\frac{1}{2}$ является нечетной?

   Ответ: при $a = -1$.

3. При каких значениях параметра a функция $y = (a-1)\cdot x + a^2 - 3$ монотонно возрастает и монотонно убывает?

   Ответ: при $a > 1$ монотонно возрастает; при $a < 0$ монотонно убывает.

4. Найдите количество корней уравнения $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+11} = a$ в зависимости от параметра a.

   Ответ: при $a \geq 4$ единственный корень; при $a < 4$ нет корней.

5. Найдите все значения параметра a, при которых любой корень уравнения $4\sqrt[3]{3,5x-2,5}+3\cdot\log_2(3x-1)+2a=0$ принадлежит отрезку $[1;3]$.

   Ответ: при $-8,5 \le a \le -3,5$.

6. При каких значениях параметра a число $\frac{\pi}{2}$ является периодом функции $f(x)=\frac{\cos 2x}{3a+\sin 2x}$?

   Ответ: при $a=0$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x^4+(a-5)^4}=|x+a-5|+|x-a+5|$ имеет единственный корень.

   Ответ: при $a=3$ или при $a=7$.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $f(x)=|2a+5|\cdot x$ имеет ровно шесть корней, где f – четная периодическая функция с периодом $T=2$, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x)=ax^2$, если $0\le x\le 1$.

   Ответ: при $a=-\frac{25}{11}$ или $a=-\frac{25}{9}$.

Указания. Решения.

1. *Решение.* Область определения функции – все действительные числа.

   1) Для того чтобы функция была четной, должно выполняться условие: $f(-x) = f(x)$.

   Составим уравнение:

$$(a-2)\cdot(-x)+3a-5=(a-2)\cdot x+3a-5;$$

   $2x\cdot(a-2)=0$ – равенство верное при всех x из области определения только при $a=2$.

   2) Для того, чтобы функция была нечетной, надо чтобы выполнялось условие: $f(-x) = -f(x)$.

   Составим уравнение:

$$(a-2)\cdot(-x)+3a-5=-((a-2)\cdot x+3a-5);$$

$$6a=10;$$

$$a=\frac{5}{3}.$$

2. *Решение.* Необходимым (но недостаточным!) условием нечетности функции является выполнение при $x=0$ одного из условий:

а) $f(0) = 0$;

б) функция f не определена в нуле.

Если $x = 0$, то $f(0) = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{2} = \frac{3+a}{2(a+1)}$.

Условие (а) выполняется при $a = -3$, а условие (б) – при $a = -1$.

Если $a = -3$, то $f(x) = \frac{1}{2^x-3} + \frac{1}{2}$ и в этом случае область определения $D(f) = (-\infty; \log_2 3) \cup (\log_2 3; +\infty)$ не симметрична относительно нуля, следовательно, функция ни четная, ни нечетная.

Если $a = -1$, то $f(x) = \frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2}$. В этом случае область определения $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ – симметрична относительно нуля. Проверим выполнение условия $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = \frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2} = \frac{2 + 2^{-x} - 1}{2(2^{-x} - 1)} = \frac{1 + \frac{1}{2^x}}{2\left(\frac{1}{2^x} - 1\right)} = \frac{2^x + 1}{2(1 - 2^x)} =$$

$$= -\frac{2^x + 1}{2(2^x - 1)} = -f(x),$$

$f(x)$ – нечетная.

3. *Решение.* Найдем производную $y'(x) = a - 1$.

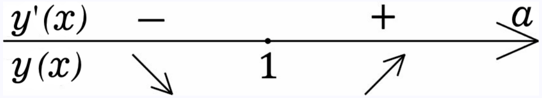

Рис.5.1

Следовательно, при $a < 1$ функция монотонно убывает, при $a > 1$ функция возрастает.

4. *Решение.* Рассмотрим функцию $y(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{x+11}$; она является возрастающей на области определения – промежутке $[5; +\infty)$, поэтому $f(x) \geq f(5) = 4$.

   Поскольку $E(y) = [4; +\infty)$, то исходное уравнение имеет единственный корень при $a \geq 4$ и не имеет корней при $a < 4$.

5. *Решение.* Рассмотрим функцию
   $f(x) = 4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3 \cdot \log_2(3x-1) + 2a.$

   Она определена при $x > \frac{1}{3}$, возрастает на области определения и принимает все значения из промежутка $(-\infty; +\infty)$. Следовательно, уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень. Этот корень принадлежит отрезку $[1; 3]$ тогда и только тогда, когда $f(1) \leq 0$ и $f(3) \geq 0$.

   Составим и решим систему:

$$\begin{cases} 4+3+2a \le 0, \\ 8+9+2a \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+7 \le 0, \\ 2a+17 \ge 0; \end{cases}$$

$$-8\frac{1}{2} \le a \le -3\frac{1}{2}.$$

6. *Решение.* Число $\frac{\pi}{2}$ является периодом данной функции, если для всех допустимых значениях x выполняется следующее равенство:

$$\frac{\cos 2x}{3a+\sin 2x} = \frac{\cos\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{3a+\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)};$$

$$\frac{\cos 2x}{3a+\sin 2x} = \frac{-\cos 2x}{3a-\sin 2x};$$

$$\frac{\cos 2x}{3a+\sin 2x} = \frac{\cos 2x}{-3a+\sin 2x}.$$

Отсюда $3a+\sin 2x = -3a+\sin 2x$, следовательно, $a=0$.

В самом деле, если $a=0$, то функция имеет вид $f(x)=\operatorname{ctg} 2x$, причем, если $2x_0 \in D(f)$, то и $2\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right) = (2x_0+\pi) \in D(f)$.

7. *Решение.* Рассмотрим функцию $y(x) = \sqrt{(x^4 + (a-5)^4}$ и функцию $g(x) = |x + a - 5| + |x - a + 5|$.

Областью определения каждой из функций является множество всех действительных чисел и, легко заметить, что выполняется условие $y(-x) = y(x)$; $g(-x) = g(x)$. Следовательно, если x_0 – корень данного уравнения, то и $(-x_0)$ – также является корнем уравнения.

Поэтому необходимым условием существования единственного корня является условие $x = 0$.

Подставим значение $x = 0$ в уравнение и решим его относительно a.

$$\sqrt{0^2 + (a-5)^4} = |a-5| + |5-a|;$$

$$|a-5|^2 = 2|a-5|;$$

$$|a-5| = 0 \quad \text{или} \quad |a-5| = 2;$$

$$a = 5, \quad \text{или} \quad a = 7, \quad \text{или} \quad a = 3.$$

При найденных значениях параметра данное уравнения имеет корень, равный нулю.

Рассмотрим все возможные случаи:

1. Если $a = 5$, то уравнение примет вид:

$$\sqrt{x^4} = |x| + |x|;$$

$$x^2 = 2|x|;$$
$$|x|^2 - 2|x| = 0;$$
$$|x| \cdot (|x| - 2) = 0;$$
$$x_1 = 0; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -2.$$

Получили, что при $a = 5$ исходное уравнение имеет три корня.

2. Если $a = 7$, то уравнение примет вид:

$$\sqrt{x^4 + (7-5)^4} = |x+2| + |x-2|;$$
$$\sqrt{x^4 + 2^4} = |x+2| + |x-2|;$$

1) если $x < -2$, то $\sqrt{x^4+16} = -2x$;

$x^4 + 16 = 4x^2$;

$x^4 - 4x^2 + 16 = 0$ – уравнение не имеет корней;

2) если $-2 \le x \le 2$, то $\sqrt{x^4+16} = 4$;

$x^4 + 16 = 16$;

$x^4 = 0$;

$x = 0$ – единственный корень;

3) если $x \ge 2$, то $\sqrt{x^4+16} = 2x$;

$x^4 + 16 = 4x^2$;

$x^4 - 4x^2 + 16 = 0$ – уравнение не имеет корней.

3. Если $a = 3$, то уравнение примет вид:

$$\sqrt{x^4 + 2^4} = |x + 2| + |x - 2|$$

и его решение аналогично рассмотренному во втором случае решению.

Поэтому оно также имеет единственный корень $x = 0$.

8. *Решение.* Если $a = 0$, то $f(x) = 0$, и ее график имеет с прямой, заданной формулой $y = 5x$, единственную общую точку.

Если $a \neq 0$, то в силу четности функции $f(x) = ax^2$ при $-1 \leq x \leq 1$ и на любом отрезке $[-1 + 2k; 1 + 2k], k \in Z$, график функции $f(x)$ получается сдвигом на $2k$ единиц вдоль оси Ox ее графика на отрезке $[-1; 1]$.

Пусть $a > 0$ (рис. 5.2), тогда решение $x = 0$ есть при всех значениях параметра a.

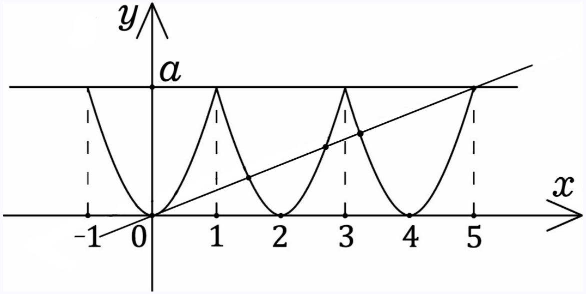

Рис.5.2

Соответственно, уравнение имеет шесть корней, если прямая $y = (2a + 5) \cdot x$ проходит через точку $A(5; a)$.

Из уравнения $a = 3(2a + 5)$ получаем $a = -2,5$, то есть, положительных корней нет, следовательно, случай $a > 0$ невозможен.

Пусть $a < 0$ (рис. 5.3).

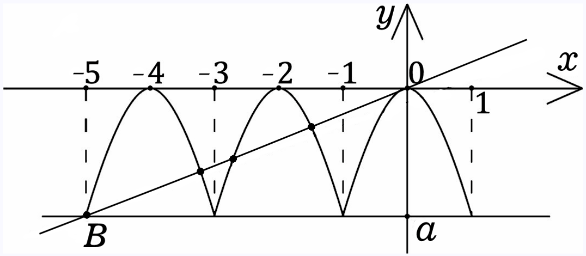

Рис.5.3

Уравнение будет иметь ровно шесть корней, если прямая $y = |2a + 5| \cdot x$ проходит через точку $B(-5; a)$.

Тогда из уравнения $a = |2a+5| \cdot (-5)$ получим $a = -\frac{25}{11}$ или $a = -\frac{25}{9}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

Построение графиков функции как необходимой графической модели для решения задач с параметрами. Решение задач с параметрами олимпиадного характера

1. При каких значениях параметра a уравнение $|x + a^2| = a^2 - 3a - 4$ имеет корни разных знаков?

   Ответ: при $a < -\frac{4}{3}$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых функция $f(x) = x^2 + ax - 4$ принимает отрицательные значения для всех x, принадлежащих промежутку $(-2; 1)$.

   Ответ: при $0 \le a \le 3$.

3. При каких значениях параметра a система

   $$\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = 1, \\ y = |x| \end{cases} \quad \text{имеет ровно два решения?}$$

   Ответ: при $a = \sqrt{2}$ или при $-1 < a < 1$.

4. При каких значениях параметра t наименьшее значение квадратного трехчлена $f(x) = 4x^2 - 4tx + t^2 - 2t + 2$ на промежутке $[0; 2]$ равно 3?

Кафедра методики преподавания математики и информатики

Ответ: при $1-\sqrt{2}<t<5+\sqrt{10}$.

5. При каких значениях параметра k неравенство $(k-1)\cdot x+2k+1>0$ верно для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x|\leq 3$?

   Ответ: при $0,4\leq k<4$

6. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2-1|=2x-x^2+a$ имеет единственный корень?

   Ответ: $x=1$ при $a=-1$.

7. При каких значениях параметра a каждое решение системы

   $\begin{cases} y+2x\geq a, \\ y-x\geq 2a \end{cases}$ является решением неравенства $2y-x>a+3$?

   Ответ: при $a>\frac{9}{8}$.

Указания. Решения.

1. *Указание.* Постройте график функции $y = |x + a^2|$ (рис. 6.1).

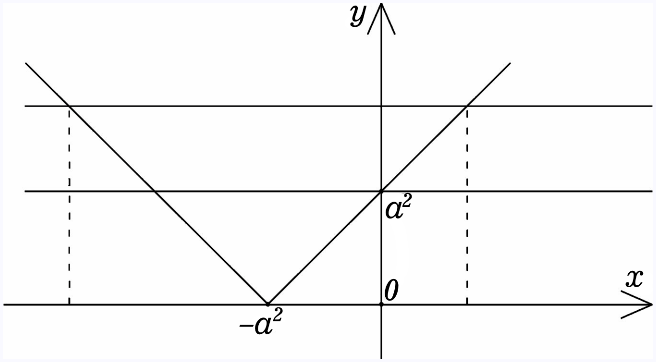

Рис.6.1

Графиком функции $y = a^2 - 3a - 4$ является семейство прямых, параллельных оси абсцисс.

2. *Указание.* Используйте графическую модель задачи (рис. 6.2).

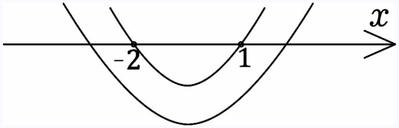

Рис.6.2

Составьте и решите систему неравенств $\begin{cases} f(-2) \le 0, \\ f(1) \le 0 \end{cases}$

3. *Указание.* Первое уравнение системы задает семейство окружностей с центром $A(0; a)$ и радиусом $r = 1$. Графиком второго уравнения являются два луча с общим началом в точке $O(0; 0)$.

   Постройте графики и рассмотрите их взаимное расположение

4. *Указание.* Найдите абсциссу вершины параболы $x_0 = \frac{t}{2}$ и рассмотрите все возможные расположения вершины (рис. 6.3; рис. 6.4; рис. 6.5) относительно промежутка $[0; 2]$.

   Составьте и решите системы, соответствующие каждому из трех случаев расположения параболы.

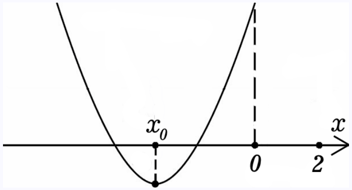

Рис.6.3

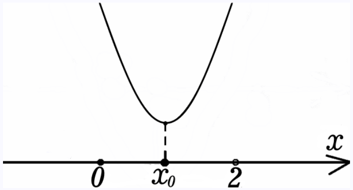

Рис.6.4

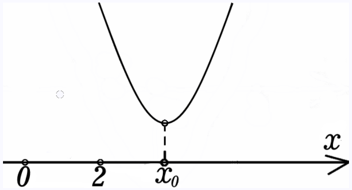

Рис.6.5

$\begin{cases} x_0 \le 0, \\ f(0) = 3. \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x_0 < 2, \\ f(x_0) = 3. \end{cases}$ $\begin{cases} x_0 \ge 2, \\ f(x_0) = 3. \end{cases}$

5. *Указание.* Рассмотрите функцию $f(x) = (k-1)\cdot x + 2k + 1$ и постройте график функции для трех случаев:
1) $k > 1$ (рис. 6.6);
2) $k < 1$ (рис. 6.7);
3) $k = 1$ (рис. 6.8).

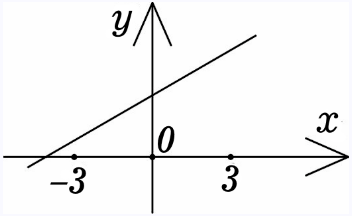

Рис.6.6

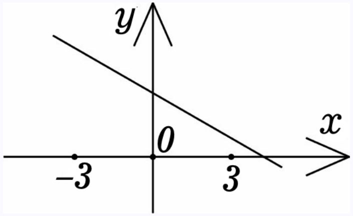

Рис.6.7

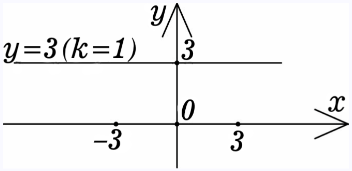

Рис.6.8

6. *Указание.* Перепишите уравнение в виде $|x^2-1| - 2x + x^2 = a$ и рассмотрите графики функций $f(x) = |x^2-1| - 2x + x^2$ и $g(x) = a$.

1) $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$, если $|x| \geq 1$

$f(x) = 1 - 2x$, если $|x| < 1$

2) $g(x) = a$ – семейство прямых, параллельных оси Ox.

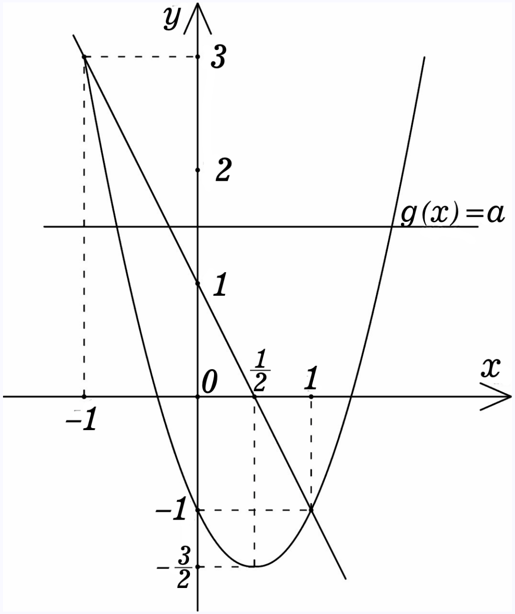

Рис.6.9

7. *Решение.* Прямые $y = a - 2x$ и $y = x + 2a$ пересекаются в плоскости xOy в точке $A(-\frac{a}{3}; \frac{5a}{3})$.

Поэтому требование задачи будет выполнено, если точка A лежит выше прямой $2y - x = a + 3$ (рис. 6.10).

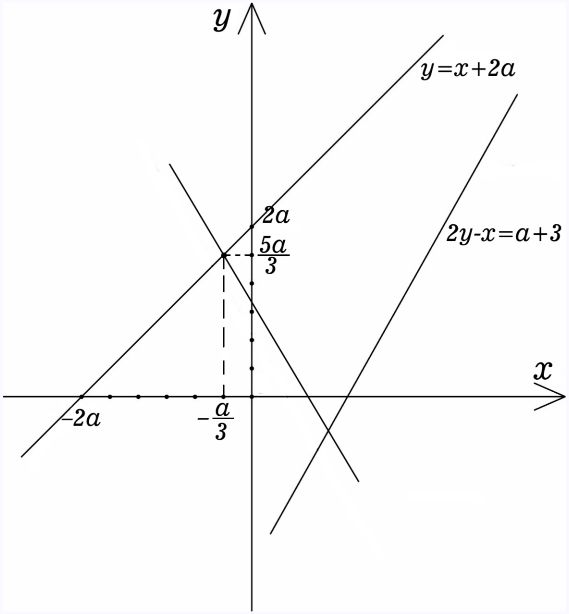

Рис.6.10

В этом случае область координатной плоскости, задаваемая исходной системой, будет содержаться в области, задаваемой неравенством $2y - x > a + 3$.

Так как точка A лежит выше прямой $2y - x = a + 3$, то выполняется неравенство $2 \cdot \frac{5a}{3} - \left(-\frac{a}{3}\right) > a + 3$. Решив это неравенство, получим $a > \frac{9}{8}$.

1. Свойства четных и нечетных функций, имеющих симметричную область определения

Определение 1. Функция $y = f(x)$, область определения которой симметрична относительно начала координат, называется **четной**, если для любого x из области её определения выполняется равентво $f(-x) = f(x)$.

Из определения следует, что:

1) область определения четной фукции симметрична относительно начала координат;

2) график четной функции симметричен относительно оси Oy.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Из определения следует, что:

1) область определения нечетной фукции симметрична относительно начала координат;

2) график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

1. Если функция одновременно обладает свойствами четности и нечетности, то она равна нулю в каждой точке области определения.

2. Если функция является нечетной, то либо ее значение в точке O равно нулю, либо она не определена в точке O.

3. Если область определения функции симметрична относительно точки O, то эта функция является суммой четной и нечетной функций:

$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = F_{\text{ч}}(x) + F_{\text{н}}(x)$, где $F_{\text{ч}}(x)$ – четная, а $F_{\text{н}}(x)$ – нечетная.

4. Если четная (нечетная) функция дифференцируема, то ее производная является четной (нечетной) функцией.

2. Периодические и непериодические функции

Функция $f(x)$, заданная на множестве D, называется периодической, если существует такое число $T > 0$, называемое периодом функции $f(x)$, что для всех x из области D числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат этому множеству и при этом справедливы равенства $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

Основные свойства периодических функций:

1. Если положительное число T – период функции $f(x)$, то число $n \cdot T$, где $n \in Z$, также является ее периодом.

2. Если $T > 0$ – период функции $f(x)$, то периодом функции $f(kx + a)$ является число $T_1 = \frac{T}{|k|}$.

3. Сумма, разность, произведение и частное периодических функций, определенных на множестве D и имеющих один и тот же наименьший период T, является периодической функцией с периодом T, при этом наименьший период может измениться.

4. Если две всюду определенные периодические функции имеют наименьший период T_1 и T_2, отношение которых – рациональное число, то их сумма, разность, произведение и частное является периодической функцией с периодом, равным наименьшему целому общему кратному периодов T_1 и T_2. Если же отношение периодов T_1 и T_2 – иррациональное число (то есть периоды T_1 и T_2 несоизмеримы), то их сумма, разность, произведение и частное являются непериодической функцией.

5. Если все значения периодической функции $f(x)$ с периодом, равным T, содержатся в области определения функции $\varphi(t)$, то сложная функция $\varphi(f(t))$ является периодической с тем же периодом T, при этом наименьший период может измениться.

Начало
Содержание
Приложение
Страница 187 из 197
Назад
На весь экран
Закрыть

6. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом T имеет производную $f'(x)$, то эта производная также является периодической функцией с периодом T, но не наоборот: если $f'(x)$ – периодическая функция, то $f(x)$ может не быть периодической функцией.

7. Если периодическая функция $f(x)$ в некоторой точке x_0 принимает значение m, то это же значение функции $f(x)$ принимает в бесконечном числе точек $x_0 + n \cdot T$, где n – произвольное целое число.

8. Периодическая функция $f(x)$ не может быть монотонной ни на одном бесконечном промежутке вида $[a; +\infty)$, $(-\infty; a]$, $(-\infty; +\infty)$.

3. График и свойства линейной функции

Линейной функцией называется функция, заданная формулой $y = ax + b$, где a и b – действительные числа.

Графиком линейной функции является прямая.

Область определения: $D(y) = R$.

Множество значений функции зависит от коэффициентов a и b:

1) при $a = 0$ значением линейной функции $y = 0 \cdot x + b$ является число b при любом x; то есть $D(y) = b$;

2) при $a \neq 0$ $D(y) = R$.

При $a > 0$ функция монотонно возрастает.

При $a < 0$ функция монотонно убывает.

При $a = 0$ функция постоянная.

Геометрический смысл параметров a и b:

1) $a = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox;

2) если $a = 0$, то $\varphi = 0$ и прямая параллельна оси Ox;

3) если $a > 0$, то угол φ острый;

4) если $a < 0$, то угол φ – тупой.

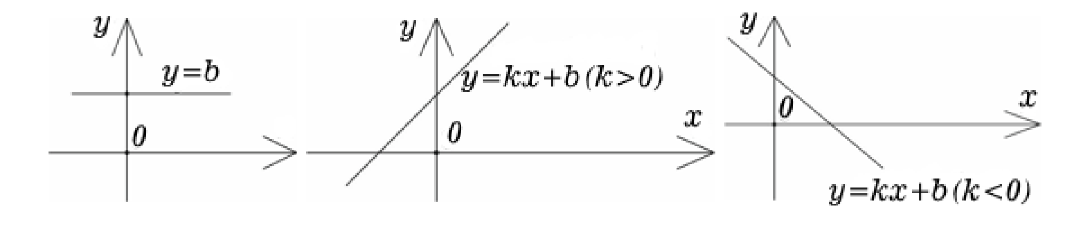

Рис.1

4. График и свойства квадратичной функции

Функция, заданная формулой $y = ax^2 + bx + c$, называется квадратичной функцией, где a, b, c – действительные числа, причем $a \neq 0$.

Графиком квадратичной функции является парабола.

Область определения функции $D(y) = R$.

Множество значений функции:

$E(y) = [y_0; +\infty)$ при $a > 0$;

$E(y) = (-\infty; y_0]$ при $a < 0$, где y_0 – ордината вершины параболы.

При $a > 0$ функция убывает на промежутке $(-\infty; x_0]$ и возрастает на промежутке $[x_0; +\infty)$, где x_0 – абсцисса вершины параболы.

При $a < 0$ функция возрастает на промежутке $(-\infty; x_0]$ и убывает на промежутке $[x_0; +\infty)$.

При $a > 0$ наименьшее значение равно y_0, а наибольшего не существует.

При $a < 0$ наибольшее значение равно y_0, а наименьшего не существует.

Задачи к зачету

Зачет по дисциплине УВО "Решения задач с параметрами"проводится в письменной форме.

Предлагаем вашему вниманию примерные задания к зачету. К каждому заданию даны ответы.

Задания

1. При каком значении параметра a уравнение $(a-3)\cdot x = a-4$ имеет единственный корень?

   Ответ: 4 (см. пример 1.1).

2. Найдите значения параметра a при которых функция $f(x) = (a+3)\cdot x + 5a \ \ (x \in R)$ является периодической.

   Ответ: -3 (см. приложение (2)).

3. Найдите все такие значения параметра $n (n \in Z)$, при которых функция $f(x) = \frac{\sin nx}{\sin \frac{x}{n}}$ имеет периодом число 4π.

   Ответ: $\{-2; -1; 1; 2\}$ (см. приложение (2)).

4. Найдите все рациональные значения параметра a, при которых периоды функция $f(x) = \sin \frac{2ax}{a^2+\sqrt{12}}$ и $g(x) = \operatorname{tg} \frac{3ax}{1-2a+\sqrt{108}}$ равны.

   Ответ: $\{-1; 0; \frac{1}{3}\}$ (см. приложение (2)).

5. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $4x^2 - 15x + 4a^3 = 0$ является квадратом другого корня?

   Ответ: $-2,5; 1,5$ (см. пример 1.11).

6. Найдите все такие значения параметра a, при которых уравнение $4 \cdot \sin x \cdot \cos x = a^2 - 6$ имеет хотя бы один корень.

   Ответ: $-2; 2$ (см. пример 2.1).

7. При каких значениях параметра a уравнение $2\sin^2 x + 3\sin x = a$ имеет корни?

   Ответ: $[-1,125; 5]$.

8. Найдите значения параметров p и q, для которых числа $x_1 = p$, $x_2 = q$ являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

   Ответ: $(0; 0)$; $(1; -2)$ (см. теорему Виета 1.11).

9. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3 - 12x^2 + ax - 60 = 0$ можно рассматривать как длины сторон прямоугольного треугольника?

   Ответ: 47.

10. При каких значения параметра a уравнения $(a-1) \cdot x^2 + 2 \cdot (a+3) \cdot x + a + 2 = 0$ имеет единственный корень?

    Ответ: $-2,2; 1$ (см. пример 1.8).

11. При каких значениях параметра a из неравенства $ax^2 - x + 1 - a < 0$ следует, что $0 < x < 1$?

   Ответ: $(0,5; 1]$.

12. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 4x + a < 0, \\ x^2 - 2x - a < 0. \end{cases} \quad \text{имеет решения?}$$

   Ответ: $(0; 3)$ (см. пример 1.16).

13. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 2x - 3| = a$ имеет 3 корня?

   Ответ: 4 (см. пример 1.17).

14. При каких значениях параметра a уравнение $|6|x| - x^2| = a$ имеет ровно 4 корня?

   Ответ: 9 (см. пример 1.17).

15. При каких значениях параметра a неравенство $|x - 3| - |2x + a| < 1$ верно при всех действительных значениях переменной x?

   Ответ: $(-8; -4)$ (см. пример 3.1).

16. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x} = ax + 2$ имеет единственный корень?

    Ответ: $(-\infty; 0] \cup \{0,125\}$ (см. пример 4.1).

17. Найдите все такие значения параметра a при которых уравнение $a - x^2 = \sqrt{a + x}$ имеет неотрицательные корни.

    Ответ: $\{0\} \cup [1; +\infty)$ (см. пример 3.8).

18. Найдите все значения параметра a при которых уравнение $2^{1-x} + 2^{1+x} = a$ имеет единственный корень.

    Ответ: 4.

19. При каких значениях параметра a уравнение $\log_{2x}(1 - ax) = \frac{1}{2}$ имеет единственный корень?

    Ответ: $\{-0,5\} \cup (0; +\infty)$ (см. пример 3.6).

20. При каких значениях параметра a уравнение $a \cdot \cos 2x = sinx$ имеет на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ единственный корень?

    Ответ: $(-1; 1)$ (см. пример 3.7)

Тест для самоконтроля

Запуск

Литература

1. Азаров, А. И. Математика для старшеклассников : методы решения задач с параметрами / А. И. Азаров, С. А. Барвенов, В. С. Федоренко. – Минск : Аверсэв, 2003.

2. Азаров, А. И. Математика для старшеклассников : Функциональный и графический методы решения экзаменационных задач / А. И. Азаров, С. А. Барвенов. – Минск : Аверсэв, 2004.

3. Амелькин, В. В. Задачи с параметрами : спр. пособие по математике / В. В. Амелькин, В.Л. Рабцевич. – Минск : Асар, 1996.

4. Василевский, А. Б. Исследовательский анализ задач / А. Б. Василевский // Вести БГПУ. – 1997. – С. 37–44.

5. Горнштейн, П. И. Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – К. : РИА «Тест», 1992.

6. Дубровская, В. А. Практикум по решению задач повышенной трудности / В. А. Дубровская, А. И. Остапук. – Брест : БрГУ, 2001.

7. Литвиненко, В. Н. Практикум по элементарной математике : Алгебра. Тригонометрия / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – 2-е изд.– М. : Просвещение, 1991.

8. Нестеренко, Ю. В. Задачи вступительных экзаменов по математике / Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. – М. : Наука, 1986.

9. Рязановский, А. Р. Алгебра и начала анализа: 500 способов и методов решения задач по математике для школьников и поступающих в вузы / А. Р. Рязановский. - М. : Дрофа, 2001.

10. Чан, Хыу Фук. Эффективные методы решения параметрических за-дач с анализом наиболее распространенных ошибок / Хыу Фук Чан [и др.]. – Минск : БГУ, 1999.

11. Ястребинецкий, Г. А. Задачи с параметрами / Г. А. Ястребинецкий. – М. : Просвещение, 1986.