Очень часто в контрактах финансового характера предусматриваются не отдельные разовые платежи, а серию платежей, распределенных во времени. Примерами могут быть регулярные выплаты с целью погашения долгосрочного кредита вместе с начисленными на него процентами, периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется некоторый фонд различного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т.д.), дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам, выплаты пенсий из пенсионного фонда и пр. Ряд последовательных выплат и поступлений называют *потоком платежей*. Выплаты представляются отрицательными величинами, а поступления – положительными.

Обобщающими характеристиками потока платежей являются наращенная сумма и современная величина. Каждая из этих характеристик является числом.

Наращенная сумма потока платежей это сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Под *современной величиной потока платежей* понимают сумму всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему.

Конкретный смысл этих обобщающих характеристик определяется природой потока платежей, причиной, его порождающей. Например, наращенная сумма может представлять собой итоговый размер формируемого инвестиционного или какого-либо другого фонда, общую сумму задолженности. Современная величина может характеризовать приведенную прибыль, приведенные издержки.

5.1 Финансовые ренты, их виды

Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы постоянны, называют *финансовой рентой* или *аннуитетом*.

Финансовая рента имеет следующие параметры:

– *член ренты* – величина каждого отдельного платежа;

– *период ренты* – временной интервал между двумя соседними платежами;

– *срок ренты* – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода;

– *процентная ставка* – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту, число платежей в году, число начислений процентов в году, моменты платежа внутри периода ренты.

Классификация рент может быть произведена по различным признаками. Рассмотрим их.

В зависимости от продолжительности периода ренты делят на *годовые* и p - *срочные*, где p – число выплат в году.

По числу начислений процентов различают *ренты с начислением один в году*, *m* раз или *непрерывно*. Моменты начисления процентов могут не совпадать с моментами рентных платежей.

По величине членов различают *постоянные* (с равными членами) и *переменные ренты*. Если размеры платежей изменяются по какому-либо математическому закону, то часто появляется возможность вывести стандартные формулы, значительно упрощающие расчеты.

По вероятности выплаты членов различают *ренты верные* и *условные*. Верные ренты подлежат безусловной выплате, например, при погашении кредита. Выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события. Поэтому число ее членов заранее неизвестно. Например, число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионера.

По числу членов различают *ренты с конечным числом членов* или *ограниченные* и *бесконечные* или *вечные*. В качестве вечной ренты можно рассматривать выплаты по облигационным займам с неограниченными или не фиксированными сроками.

В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту ренты подразделяются на *немедленные* и *отложенные* или *отсроченные*. Срок немедленных рент начинается сразу, а у отложенных запаздывает.

Ренты различают по моменту выплаты платежей. Если платежи осуществляются в конце каждого периода, то такие ренты называются *обычными* или *постнумерандо*. Если же выплаты производятся в начале каждого периода, то ренты называются *пренумерандо*. Иногда предусматриваются платежи в середине каждого периода.

Анализ потоков платежей в большинстве случаев предполагает расчет наращенной суммы или современной величины ренты.

5.2 Формулы наращенной суммы

5.2.1 Обычная годовая рента

Пусть в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по R денежных величин (например, грн.), проценты начисляются один раз в года по ставке i. В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $R(1+i)^{n-1}$, так как на сумму R проценты начислялись в течение $n-1$ года. Второй взнос увеличится до $R(1+i)^{n-2}$ и т.д. На последний взнос проценты не начисляются. Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \ldots + R(1+i)^{n-1},$$

в которой первый член равен R, знаменатель $(1+i)$, число членов n. Эта сумма равна

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = Rs_{n;i}, \tag{5.1}$$

где

$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{5.2}$$

и называется *коэффициентом наращения ренты*. Он зависит только от срока ренты n и уровня процентной ставки i. Поэтому его значения могут быть представлены в таблице с двумя входами.

Пример 5.1 В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн. грн., на которые начисляются проценты по сложной годовой ставке 10%. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение.

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 10 \cdot \frac{(1+0{,}1)^3 - 1}{0{,}1} = 33{,}1 \text{ млн. грн.}$$

5.2.2 Годовая рента, начисление процентов m раз в году

Посмотрим, как усложнится формула, если предположить теперь, что платежи делают один раз в конце года, а проценты начисляют m раз в году. Это означает, что применяется каждый раз ставка $\frac{j}{m}$, где j – номинальная ставка процентов. Тогда члены ренты с начисленными до конца срока процентами имеют вид

$$R\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m(n-1)},\ R\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m(n-2)},\ \ldots,\ R.$$

Если прочитать предыдущую строку справа налево, то нетрудно увидеть, что перед нами опять геометрическая прогрессия, первым членом которой является R, знаменателем $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$, а число членов n. Сумма членов этой прогрессии и будет наращенной суммой ренты. Она равна

$$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1}. \tag{5.3}$$

5.2.3 Рента p - срочная при $m=1$

Найдем наращенную сумму при условии, что рента выплачивается p раз в году равными платежами, а проценты начисляются один раз в конце года. Если R – годовая сумма платежей, то размер отдельного платежа равен $\frac{R}{p}$. Тогда последовательность платежей с начисленными до конца срока процентами также представляет собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке,

$$\frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}},\ \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{2}{p}},\ \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{3}{p}},\ ...,\ \frac{R}{p},$$

у которой первый член $\frac{R}{p}$, знаменатель $(1+i)^{\frac{1}{p}}$, общее число членов np. Тогда наращенная сумма рассматриваемой ренты равна сумме членов этой геометрической прогрессии

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{\left((1+i)^{\frac{1}{p}}\right)^{np}-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}=\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}=Rs_{n;i}^{(p)}. \tag{5.4}$$

где

$$s_{n;i}^{(p)}=\frac{(1+i)^{n}-1}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]} \tag{5.5}$$

коэффициент наращения p - срочной ренты при $m=1$.

5.2.4 Рента p - срочная при $p=m$

В контрактах часто начисление процентов и поступление платежа совпадают во времени. Таким образом, число платежей p в году и число начислений процентов m совпадают, т.е. $p=m$. Тогда для получения формулы расчета наращенной суммы можно воспользоваться аналогией с годовой рентой и одноразовым начислением процентов в конце года, для которой

$$S=R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}.$$

Различие будет лишь в том, что все параметры теперь характеризуют ставку и платеж за период, а не за год. Таким образом, получаем

$$S=\frac{R}{m}\cdot\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\frac{j}{m}}=R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{j}. \qquad (5.6)$$

5.2.5 Рента p - срочная, $p\geq 1$, $m\geq 1$

Это самый общий случай p - срочной ренты с начислением процентов m раз в году, причем, возможно $p\geq m$.

Первый член ренты $\frac{R}{p}$, уплаченный спустя $\frac{1}{p}$ года после начала, составит к концу срока вместе с начисленными на него процентами

$$\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\left(n-\frac{1}{p}\right)}=\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn-\frac{m}{p}}.$$

Второй член ренты к концу срока возрастет до

$$\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\left(n-\frac{2}{p}\right)}=\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn-2\cdot\frac{m}{p}}$$

и т.д. Последний член этой записанной в обратном порядке геометрической прогрессии равен $\frac{R}{p}$, ее знаменатель $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$, число членов nm.

В результате получаем наращенную сумму

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}\right)^{np}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}=\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+i\right)^{\frac{m}{p}}-1}. \qquad (5.7)$$

Отметим, что из нее легко получить все рассмотренные выше частные случаи, задавая соответствующие значения p и m.

5.3 Формулы современной величины

5.3.1 Обычная годовая рента

Пусть член годовой ренты равен R, процентная ставка i, проценты начисляются один раз в конце года, срок ренты n. Тогда *дисконтированная величина первого платежа* равна

$$R\frac{1}{1+i}=Rv$$

где $v=\dfrac{1}{1+i}$ – *дисконтный множитель*.

Приведенная к началу ренты величина второго платежа равна Rv^2 и т.д. В итоге приведенные величины образуют геометрическую прогрессию: Rv, Rv^2, Rv^3, ..., Rv^n, сумма которой равна

$$A=Rv\frac{v^n-1}{v-1}=R\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}=Ra_{n;i}, \tag{5.8}$$

где

$$a_{n;i}=\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i} \tag{5.9}$$

– *коэффициент приведения ренты*.

Как видим, коэффициент приведения ренты зависит только от двух параметров: срока ренты n и процентной ставки i. Поэтому его значения могут быть представлены в табличном виде. Такие таблицы можно найти в книгах или построить самим на компьютере.

5.3.2 Рента p - срочная, $p\geq 1$, $m\geq 1$

Аналогичные рассуждения позволяют получить формулу для расчета современной величины ренты в самом общем случае для произвольных значений p и m

$$A=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}, \tag{5.10}$$

от которой нетрудно перейти к частным случаям при различных p и m.

5.4 Зависимость между современной величиной и наращенной суммой ренты

Пусть A – современная величина годовой ренты постнумерандо, а S – ее наращенная стоимость к концу срока n, $p=1$, $m=1$.

Покажем, что наращение процентов на сумму A за n лет дает сумму, равную S:

$$A(1+i)^n = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = R\frac{(1+i)^n-1}{i} = S. \tag{5.11}$$

Отсюда же следует, что дисконтирование S дает A:

$$Sv^n = A, \tag{5.12}$$

а коэффициент дисконтирования и наращения ренты связаны соотношениями:

$$a_{n;i}(1+i)^n = s_{n;i}, \tag{5.13}$$

$$s_{n;i}v^n = a_{n;i}. \tag{5.14}$$

5.5 Определение параметров финансовой ренты

Иногда при разработке контрактов возникает задача определения по заданной наращенной сумме ренты S или ее современной стоимости A остальных параметров ренты: R, n, i, p, m. Такие параметры как m и p обычно задаются по согласию двух подписывающих сторон. Остаются параметры R, n, i. Два из них задаются, а третий рассчитывается. Такие расчеты могут быть неоднократно повторены при различных значениях задаваемых параметров, пока не будет достигнуто согласие сторон.

5.5.1 Определение размера ежегодной суммы платежа R

В зависимости от того какая обобщающая характеристика постоянной ренты задана S или A, возможны два варианта расчета

$$R = \frac{S}{s_{n;i}} \tag{5.15}$$

или

$$R = \frac{A}{a_{n;i}}. \tag{5.16}$$

5.5.2 Определение срока постоянной ренты

Рассмотрим решение этой задачи на примере обычной годовой ренты с постоянными заданными платежами. Решая исходные формулы для S и A

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \text{ и } A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

относительно срока n, получаем соответственно следующие два выражения

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)} \text{ и } n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)}{\ln(1+i)}. \qquad (5.17)$$

Последнее выражение, очевидно, имеет смысл только при $R > Ai$.

5.5.3 Определение ставки процентов

Для того, чтобы найти ставку i, необходимо решить одно из нелинейных уравнений (опять предполагаем, что речь идет о постоянной годовой ренте постнумерандо) следующего вида

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \text{ и } A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

которые эквивалентны двум другим

$$s_{n;i} = \frac{S}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \text{ и } a_{n;i} = \frac{A}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (5.18)$$

В этих уравнениях единственным неизвестным является процентная ставка i. Решение нелинейных уравнений может быть найдено лишь приближенно. Известно несколько методов решения таких уравнений: метод линейной интерполяции, метод Ньютона-Рафсона и др. Мы рассмотрим сначала первый из них.

Метод линейной интерполяции. Прежде всего нужно найти с помощью прикидочных расчетов нижнюю ($i_н$) и верхнюю ($i_в$) оценки ставки. Это осуществляется путем подстановки в одну из формул (5.18) различных числовых значений i и сравнения результата с правой частью выражения. Далее корректировка нижнего значения ставки производится по следующей интерполяционной формуле

$$i = i_н + \frac{S - s_н}{s_в - s_н}(i_в - i_н). \qquad (5.19)$$

в которой $s_в$ и $s_н$ – значения коэффициента наращения (или коэффициента приведения) ренты для процентных ставок $i_в$ и $i_н$ соответственно. Полученное значение ставки проверяют, подставляя его в левую часть исходного уравнения и сравнивая результат с правой частью. Если достигнутая точность недостаточна, повторно применяют формулу (5.19), заменив в ней значение одной из приближенных оценок ставки на более точное, найденное на предыдущей итерации, и соответствующее ей значение множителя наращения (или приведения).

Пример 5.2 Для проведения замены оборудования предприятию необходимо за 10 лет накопить 2 млн. грн.. Ежегодно она может вносить в банк для этой цели 100 000 грн. на специальный счет. Под какую ставку сложных процентов необходимо вкладывать эти деньги, чтобы накопить требуемую сумму в указанный срок?

Решение.

Согласно формуле (1.18),

$$s_{n;i} = \frac{S}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{2000000}{100000} = 20.$$

Определим $s_{n;i}$, для нескольких произвольных значений процентных ставок. Так для $i = 0{,}14$

$$s_{10;\,0{,}14} = \frac{(1+0{,}14)^{10} - 1}{0{,}14} = 19{,}26.$$

Для $i = 0{,}15$

$$s_{10;\,0{,}15} = \frac{(1+0{,}15)^{10} - 1}{0{,}15} = 20{,}33$$

Действительное значение процентной ставки лежит в интервале $0{,}14 < i < 0{,}15$, так как $19{,}26 < 20 < 20{,}33$.

Воспользуемся формулой (5.19) и найдем действительное значение процентной ставки:

$$i = 0{,}14 + \frac{20 - 19{,}26}{20{,}33 - 19{,}26}(0{,}15 - 0{,}14) = 0{,}1469.$$

Проверим правильность нахождения действительной процентной ставки:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0{,}1469)^{10} - 1}{0{,}1469} = 20$$

Таким образом, процентная ставка должна составлять $i = 14{,}69\%$.

Метод Ньютона-Рафсона. В этом методе решение также находят итеративно, постепенно шаг за шагом уточняя оценку. Метод разработан для решения нелинейных уравнений вида $f(x) = 0$.

В нашем конкретном случае алгоритм поиска сводится к трем операциям на каждом шаге, которые зависят от постановки задачи (задана S или A) и типа ренты.

Сначала будем считать, что *известна наращенная сумма* S *и найдена какая-то начальная оценка процентной ставки* (например, методом проб).

а) постоянная годовая рента постнумерандо, проценты начисляются один раз в конце года, $p = 1$, $m = 1$.

Требуется решить уравнение вида

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{S}{R} = s_{n;i} \text{ или } \frac{(1+i)^n - 1}{i} - s_{n;i} = 0.$$

Если ввести обозначение $q=1+i$ и умножить обе части уравнения на $-(q-1)$, то получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k, состоящий из следующих трех операций:

$$f(q_k)=q_k^n-1-\frac{S}{R}(q_k-1),$$

$$f'(q_k)=nq_k^{n-1}-\frac{S}{R},$$

$$q_{k+1}=q_k-\frac{f(q_k)}{f'(q_k)}.$$

б) постоянная p- срочная рента постнумерандо, проценты начисляются один раз в конце года, $p\geq 1$, $m=1$.

Требуется решить уравнение вида

$$\frac{(1+i)^n-1}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}=\frac{S}{R}=s_{n;i}^{(p)} \text{ или } \frac{(1+i)^n-1}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}-s_{n;i}^{(p)}=0.$$

Вновь используем обозначение $q=1+i$ и получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k, состоящий из следующих трех операций:

$$f(q_k)=q_k^n-1-\frac{S}{R}p\left(q_k^{\frac{1}{p}}-1\right),$$

$$f'(q_k)=nq_k^{n-1}-\frac{S}{R}\left(q_k^{\frac{1}{p}-1}\right),$$

$$q_{k+1}=q_k-\frac{f(q_k)}{f'(q_k)}.$$

Замечания.

1. Начальную оценку $q_0=1+i_0$, требующуюся для начала итеративной процедуры следует выбирать такой, чтобы соответствующий ей множитель наращения был как можно ближе к заданному отношению $\frac{S}{R}$. Это сократит число итераций и обеспечит сходимость алгоритма.
2. Остановка вычислений осуществляется после того как проверка, заключающаяся в сравнении множителя наращения и отношения $\frac{S}{R}$, свидетельствует об их совпадении с достаточной (наперед заданной) точностью.

Теперь будем считать, что *известна современная стоимость A и найдена какая-то подходящая начальная оценка процентной ставки.*

а) постоянная годовая рента постнумерандо, проценты начисляются один раз в конце года, $p=1$, $m=1$.

Требуется решить уравнение вида

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{A}{R}=a_{n;i} \text{ или } \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}-a_{n;i}=0.$$

Здесь также используем обозначение $q=1+i$, и после умножения обеих частей равенства на $(q-1)$ получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k, состоящий из следующих трех операций:

$$f(q_k)=q_k^{-n}-1+\frac{A}{R}(q_k-1),$$

$$f'(q_k)=\frac{A}{R}-nq_k^{-(n+1)},$$

$$q_{k+1}=q_k-\frac{f(q_k)}{f'(q_k)}.$$

б) постоянная p- срочная рента постнумерандо, проценты начисляются один раз в конце года, $p\geq 1$, $m=1$.

Требуется решить уравнение вида

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}=\frac{A}{R}=a_{n;i} \text{ или } \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}-a_{n;i}=0.$$

Сделав подстановку $q=1+i$, получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k, состоящий из следующих трех операций:

$$f(q_k)=q_k^{-n}-1+\frac{A}{R}p\left(q_k^{\frac{1}{p}}-1\right),$$

$$f'(q_k)=\frac{A}{R}\left(q_k^{\frac{1}{p}-1}\right)-nq_k^{-(n+1)},$$

$$q_{k+1}=q_k-\frac{f(q_k)}{f'(q_k)}.$$